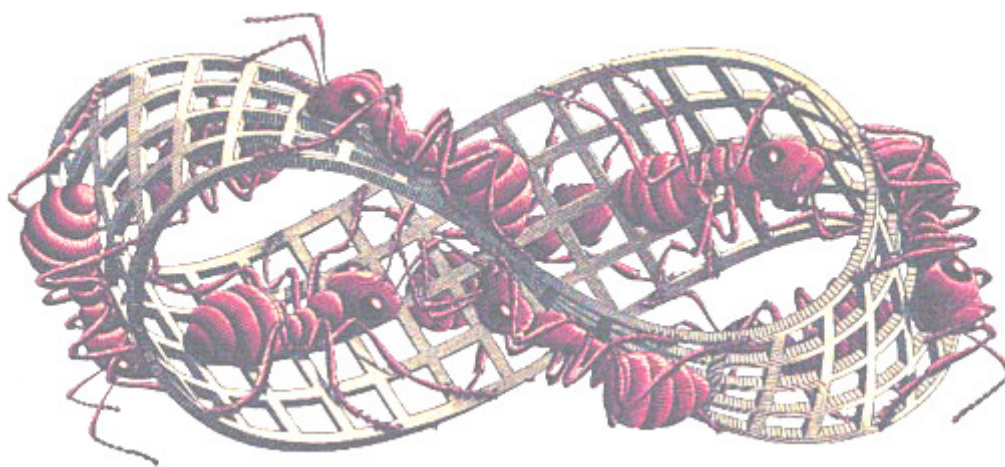


Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

**Curso de Matemática
Cadeira de História da Matemática**

História do Conceito de Infinito



Docente : Prof. Dr. Luís Mendes de Carvalho

Discentes : Marta Augusta da C. Ramires Madeira n° 9602374
João Paulo Pita da Costa n° 9801221



Discentes : Marta Augusta da C. Ramires Madeira nº 9602374
João Paulo Pita da Costa nº 9801221

● infinito é algo indefinido, por carecer de fim, de limite ou termo. O infinito não é nem definido nem indefinido, porque em relação a ele carece de sentido toda a referência a um fim, limite ou termo. O infinito é algo meramente potencial: está a ser, mas não é.

Transcrição de um dicionário de filosofia

Colocar o mundo num grão de areia
E o céu numa flor selvagem;
Pôr o infinito na palma da tua mão
E a eternidade numa hora.

William Blake, *Auguries of Innocence*

Prefácio

O texto que desenvolvemos de seguida aborda um tema sempre presente em qualquer área da Matemática.

Não procura dar uma resposta, mas sim apontar diversas dimensões da reflexão sobre o conceito de infinito, descrevendo a sua evolução numa perspectiva histórica. Tratando-se de um trabalho realizado no âmbito de uma licenciatura em matemática, dar-se-á especial relevância ao tratamento do conceito de infinito aplicado aos seres matemáticos, fundamentado na teoria de Cantor. Porém, entende-se como necessário um enquadramento no campo filosófico, uma vez que muitas das vezes estas duas ciências, a Matemática e a Filosofia, são indissociáveis.

A formalização das demonstrações exibidas no decorrer deste texto, tanto as de carácter puramente matemático como as de índole filosófica, apresentar-se-á apenas quando se considerar necessária.

Chama-se a atenção de que algumas das teorias presentes neste texto, como a cantoriana por exemplo, não são aceites pela totalidade da comunidade científica devido ao seu carácter pouco convencional a nível do senso comum. Devido ao carácter polémico do tema adoptado, muitas destas teorias entram em conflito com posições teológicas, filosóficas e até mesmo ao nível dos fundamentos da matemática.

No final deste texto, em anexo e por ordem alfabética, apresentamos as biografias dos matemáticos e filósofos que mais relevância tiveram no desenvolvimento da temática aqui apresentada.

Índice

Uma breve introdução	1
O άπειρον de Anaximandro	3
O infinito matemático numa perspectiva histórica	15
Paradoxos de Zenão	17
Giordano Bruno e a infinidade do Universo	22
Do Mundo fechado ao Universo infinito	26
O embrião do conceito matemático	28
O paraíso de Cantor	31
A hipótese do contínuo	40
Axioma da escolha	48
O Hotel de Hilbert	52
Os paradoxos consequentes da teoria de Cantor	55
O paradoxo de Russell	59
A existência do infinito	68
Descida infinita ou subida infinita	70
O fascínio dos infinitésimos	72
Os fantasmas desaparecidos	76
Somas paradoxais	80
Bibliografia	82
Anexos	84

Anexo A - Biografias

Anexo B - Artigos da Internet

Uma breve introdução

Maravilha-me a imaginação humana , tão viva que frequentemente nos leva a debater os pontos mais finos das nossas fantasias. (...) Por vezes seduz-nos tanto uma possibilidade conceptual que pomos de lado o nosso sentido prático normal das realidades.

Michael Guillen, in *Pontes para o Infinito*

Infinito... Em que é que pensamos quando ouvimos esta palavra? Em números enormes, incalculáveis, números que nunca mais acabaríamos de contar...? Um céu imenso, sem nunca mais acabar...? Cada um de nós pensará certamente uma coisa diferente, precisamente porque o conceito do infinito não tem por base nenhuma experiência sensível.

Nenhum assunto provocou tanta polémica e tanta discussão entre matemáticos, filósofos e teólogos como a ideia de infinito. Grande parte da matemática fundamenta-se no conceito de infinito... muito embora nada seja mais difícil de definir e a controvérsia a seu respeito pareça interminável.

O conceito de infinito surge assim como um dos mais importantes de toda a matemática e também como um daqueles cujo significado tem sido mais discutido.

O infinito é uma espécie de enigma matemático, de truque de magia, porque o seu conteúdo é inesgotável. *Se retirarmos um elemento a um conjunto infinito restarão, não um a menos, mas exactamente o mesmo número de elementos e o processo pode ser repetido com qualquer número de elementos, tantas vezes quantas se queira.* Foram paradoxos como este que forçaram os nossos antepassados a terem cuidado com argumentos envolvendo apelos ao infinito.

Mas a que é que nos referimos, quando falamos de infinito ?

O conceito de infinito surge, antes de mais, na filosofia com o significado de que não existem limites. É a especulação teológica que dá a este conceito um conteúdo positivo de perfeição (ou grandeza) que é impossível superar.

Micheli, in Romano, 1997, p. 133

De acordo com Ferrater Mora (1986), o conceito de infinito pode ser entendido de várias maneiras:

- O infinito é algo de indefinido, por não ter fim ou limite;
- O infinito não é definido nem indefinido, porque no que lhe diz respeito, carece de sentido toda a referência a um fim ou limite;
- O infinito é algo negativo e incompleto;
- O infinito é algo positivo e completo;
- O infinito é algo meramente potencial, que está "sendo" mas não "é";
- O infinito é algo actual e inteiramente dado.

Ao longo da história foram vários os matemáticos e filósofos que optaram por cada uma destas concepções, sem nunca se chegar a um consenso.

De acordo com Micheli (Romano, 1997), e apesar de todas as ambiguidades, existem apenas duas grandes classes de significações a atribuir ao termo:

- as **positivas** que se referem à noção de número transfinito elaborada por Cantor no âmbito da teoria dos conjuntos, ou que se referem ao infinito enquanto característica necessária da perfeição absoluta;
- as **negativas** que defendem o infinito como a ausência de um certo limite¹.

Para além das diferentes significações que podem ser atribuídas ao termo, um outro motivo gerador de ambiguidades é a diversidade de objectos a que a noção se pode aplicar. O conceito de infinito pode aplicar-se tanto a seres matemáticos (puramente conceptuais), como ao mundo (conjunto dos entes materiais) ou até mesmo a Deus (enquanto objectificação de todos os entes possíveis).



*

¹ note-se que a palavra grega *apeiron* quer dizer, precisamente "sem limite"

Foi em 1655, com John Wallis, que se convencionou representar o infinito por um oito deitado. Existem duas possíveis explicações para que o símbolo adoptado tenha sido ∞ :

- A semelhança com a última letra do alfabeto grego, ω ;
- A aparência com a escrita do número mil em romano primitivo, CD .

*

"O substantivo «infinito» é uma palavra cómoda e que se não pode substituir : não se pode tornar misterioso nem «fazer vertigens» senão àqueles que ignoram ou que esquecem a maneira tão simples pela qual se pode defini-lo."

Marcel Boll in *As etapas da matemática*

O άπειρον de Anaximandro

Do nada criei um novo e estranho universo.

Janos Bolyai

Cronologicamente Anaximandro é conhecido como segundo filósofo da antiga escola jônica, situado entre Tales e Anaxímenes, todos eles de Mileto e também todos eles astrónomos.

Mais abstractamente que Tales, Anaximandro opinou, que o elemento de base de tudo é algo indeterminado, ainda que esteja sempre a assumir alguma determinação, a qual pode ser portanto constantemente alternada por outras e outras determinações.

A esta espécie de elemento, sem determinações, principalmente sem qualidades contrárias, chamou-o άπειρον (infinito).

Como consequência deste posicionamento de Anaximandro, temos o alargar da questão do infinito, para a questão do infinito em geral. Trata-se então não só de uma filosofia da natureza, mas também de uma ontologia em fase de formação.

Didacticamente, a abordagem do άπειρον começa por oferecer dois interesses. O primeiro de nível estritamente histórico, pois Anaximandro apresentou-o, situado nas preocupações da filosofia e da natureza, visando sobretudo resolver o questionamento da variedade dos seres naturais. O segundo interesse é puramente sistémico, pois discute o problema do infinito em geral.

Sobre o infinito (άπειρον) de Anaximandro não se conservaram suficientes informações doxográficas para que se possam definir todos os detalhes que este conceito alcançou com o seu introdutor.

Entre as informações algumas referem-se ao infinito apenas no contexto de elemento constitutivo, e que servia pois como princípio. Outras das informações conduzem ao problema do infinito em geral.

Informou, em resumo, Diógenes Laércio sobre o infinito proposto como elemento constitutivo:

"Anaximandro filho de Praxíades de Mileto afirma, que princípio e elemento são o infinito, mas sem defini-lo como ar, água ou qualquer outra substância. Ele diz, que as partes do infinito alteram-se e que o todo, mesmo do infinito é imutável "

É apreciável um texto de Simplício, que contém também um fragmento com palavras de Anaximandro:

"Entre os que dizem, que (o princípio e o elemento) são um só e em movimento ilimitado, Anaximandro de Mileto, filho de Praxíades, que foi sucessor e discípulo de Tales, diz que o princípio e elemento de todas as coisas é o infinito (άπειρον), e foi o primeiro que introduziu este nome de princípio.

Afirma que este não é água, nem qualquer outro dos denominados elementos, senão uma natureza diferente e infinita, a partir da qual se geram os céus e os mundos (contidos) nele.

De onde eles derivam, para ali eles retornam por destruição, pela força da necessidade; porque eles pagam reciprocamente a punição e a recompensa, da sua injustiça, conforme a decisão do tempo."

Até aqui o texto de Simplício parece tomado de Teofrasto, o qual por sua vez teria citado Anaximandro. O texto que se segue pertence ao mesmo Simplício:

"É evidente, então, que, este (Anaximandro) depois de haver observado a transformação dos 4 elementos uns nos outros, convenceu-se que nenhum deles poderia ser um substracto ; este seria uma coisa á parte e que não eles. Para ele a geração produz-se não ao alterar-se o elemento, mas ao separarem-se os contrários, por obra do movimento eterno. Por isso, Aristóteles classificou-o como pertencendo à escola de Anaxágoras.

Os contrários são o calor e o frio, o seco e o húmido, etc. De acordo com Anaxágoras, a unidade contém os contrários e dela derivam por divisão.

Segundo Empédocles e Anaxágoras, já existe a unidade e a multiplicidade dos entes; este fez derivar tudo da mistura e divisão"(Simplício, Física, 24 21-26).

"O milesiano Anaximandro, filho de Praxíadres, propôs como princípio uma certa natureza distinta dos quatro elementos, o movimento eterno, o qual era, dizia, a causa da geração dos céus"(Simplício, Física, 41, 17-19).

Aqui a expressão movimento eterno está no contexto de expressão abstracta para designar o processo concreto da natureza em geração cíclica e destruição, transformação dos contrários uns nos outros.

Hipólito, um cristão, e Pseudo-Plutarco escreveram textos paralelos ao de Simplício, e possivelmente todos os três repetiram apenas os informes do perdido livro de Teofrasto, firmados entretanto num contexto mais fácil de ser captado naquele tempo do que hoje.

"Anaximandro é discípulo de Tales... Anaximandro, filho Praxíades de Mileto... disse, que o infinito (ἀπειρον) é elemento e princípio de tudo; foi ele, que usou esta palavra. Além disso, ele disse, que o movimento, do qual resulta o nascimento dos céus, é eterno.... Ele disse, que o princípio de todos os seres existentes é a natureza do infinito, do qual nascem todos os céus e cosmos nele contidos. Esta natureza é eterna e ela não envelhece e envolve todos os mundos. Ele falou sobre o tempo, como se o nascimento, a existência e a destruição fossem limitadas"(Hipólito, Refutações, 16, 1-2).



"Anaximandro, que foi companheiro de Tales, disse que o infinito (ἄπειρον) continha toda a causa do nascimento e destruição do mundo, a respeito do qual ele diz, que dele foram separados os céus e em geral todos os mundos em grande número" (Pseudo-Plutarco, Miscelânea, 2).

A prova do infinito (ἄπειρον), como foi proposta por Anaximandro, deve ser examinada nos seus detalhes. Como hipótese, o infinito de Anaximandro pretende explicar os diversos fenômenos da natureza, em ciclo de gerações e destruições.

Em primeiro lugar, a teoria do infinito surgiu, porque Anaximandro considerou impraticáveis os elementos que se encontram de ordinário na natureza, como a água, o ar e outros. Esta prova negativa adverte para uma razão geral, a de que cada um destes elementos contém algo contrário ao que há nos outros. Nenhum contrário pode ser componente de uma natureza inversa.

O pressuposto geral da hipótese é a de que somente um princípio infinito, sem determinações particulares, pode exercer a função de abstracto básico, ou seja, como primeiro elemento a partir de onde tudo se faz.

Anaximandro deve entretanto apresentar adequadamente este princípio infinito. Eis pois um segundo campo em que Anaximandro tem de trabalhar, a fim de provar plenamente a sua teoria.

A prova, portanto, faz um jogo contínuo entre dois campos, os quais interagem, e apresentam-se muitas vezes misturados no mesmo texto dos doxógrafos.

Recapitulando, Anaximandro opinou que o elemento de base de todos os seres não pode ser um dos seres existentes constatados pela experiência. Portanto, não pode ser algo como a água, o ar, o fogo e a terra. Estes elementos contêm propriedades contrárias entre si, razão porque uns não se podem fazer através dos outros. A água, por exemplo, privilegia certos caracteres, enquanto que o ar outros.

O infinito (ἄπειρον) é aquele elemento indeterminado, que pode indiferentemente estar presente sob todas as determinações provenientes.

A diversidade acontece através do acrescentar das determinações mais diversas, mesmo as contrárias. Inversamente, todos os seres podem reduzir-se ao fundamento, pelo abandono das determinações.

Também a morte, que nunca é total, se explica através deste infinito, porque a este infinito tudo retorna ao perder, qualquer ser, as suas formas por acção de forças contrárias.

Esteve aliás Anaximandro na linha de todos aqueles que não encontram no atomismo superficial senão uma parte da explicação do mundo.

Os átomos não são toda a realidade, porque não explicam o espaço nem as forças inter-atômicas. Para além dos átomos elementares poderá existir uma realidade mais vasta que tudo gera e ampara, como fonte de partida dos fenômenos e ponto de retorno quando estes se desfazem.

Assim como os átomos explicam a realidade até um determinado nível, os elementos da natureza, como a água, o ar, etc., explicam-na até um determinado grau de profundidade; depois disto, somente o infinito esclarece o porquê da água, do ar, etc. Eis a essência da teoria de Anaximandro.

As críticas e aproximações de Aristóteles ao infinito de Anaximandro importam muito. As informações sobre a prova do infinito como elemento base vieram até nós também através das críticas de Aristóteles, as quais não são todavia precisas. Alguns dos textos de Aristóteles fazem ressalvas ao infinito de Anaximandro, sem o citar directamente.

Curiosamente, o mesmo Aristóteles tem algumas aproximações com o modo de pensar de Anaxágoras, no que se refere aos conceitos da matéria como potência real indeterminada, e ainda no que diz respeito aos conceitos de forma como elemento constitutivo determinante. A diferença está num detalhe: para Aristóteles a matéria como potência real não é infinita, mas apenas indefinida.

O primeiro texto de Aristóteles diz, que, se o elemento básico de Anaximandro não fosse infinito segundo a quantidade, faltaria algum dia a matéria para novas criações.

"A opinião sobre a existência de um infinito (ἄπειρον) chegou àqueles, que consideraram a coisa, por causa de cinco argumentos... Além disto, porque a geração e destruição desaparece somente, se não for infinito aquilo, de que derivam todas as coisas derivadas" (Aristóteles, Física, III, 4. 203b 15).

Possivelmente é este o único e vago argumento de Anaximandro a favor do infinito (ἄπειρον) como elemento constitutivo dos seres.

O outro texto, também de Aristóteles, mas comentado com detalhe por Simplício, considera que, se o elemento básico fosse infinito, ele não poderia ser um destes elementos por nós conhecidos. Se fosse um destes elementos, por exemplo, se a água fosse este elemento infinito, ela destruiria todas as outras coisas, porque lhes seria contrária pelas qualidades opostas. Possivelmente Anaximandro não teceu precisamente assim as suas considerações. Mas certamente ponderou de modo semelhante, que os elementos por nós conhecidos não estavam em condição de produzir todas as contrariedades das coisas geradas.

Eis o segundo texto mencionado de Aristóteles:

"Não é possível que o corpo infinito seja uno e simples, nem no caso de, como dizem alguns, algo à parte dos elementos, a partir do qual se engendram aqueles, nem em nenhum outro caso.

Alguns há, entretanto, que supõem, que este é o infinito (ἄπειρον), e não o ar, ou a água. Por não ser um destes demais elementos, estes não são destruídos por ele, ainda que estes demais todos têm contrariedades entre si: o ar é frio, a água é húmida, o fogo aquece. Fosse o infinito um dos elementos, os outros seriam destruídos. Por isso dizem que, aquilo do qual estes são gerados, é distinto" (Arist., Física, III, 5. 204 b 24-28).

Simplicio comentando Aristóteles, citou mesmo Anaximandro pelo seu nome:

"Depois de demonstrar, que nenhum corpo natural, composto de muitos elementos, pode ser infinito, mostra em seguida Aristóteles também que dito corpo infinito não pode ser uno e simples.

Se ele fosse simples, seria, ou um dos 4 elementos, ou outra coisa à parte deles, tal como Anaximandro fala sobre "O que é à parte dos elementos", a partir do qual se geram os outros elementos. E que nenhum dos elementos pode ser o infinito (ἀπειρον) é evidente também, porque Anaximandro, com a intenção de afirmá-lo como infinito, não propôs que fosse o ar, o fogo, ou qualquer um dos quatro elementos; isto em função de estes comportarem-se como contrários entre si, porquanto, se estes fossem infinitos, os seus contrários o seriam por ele" (Simplicio, Física, 479, 30-480, 4).



Aristóteles atacou o argumento da infinitude do elemento básico, dizendo da não necessidade do seu caráter infinito, para que aconteçam mudanças.

"Para que não cesse a geração, não é necessário, que o corpo sensível seja infinito, porque, enquanto o universo é finito, a dissolução de algo obriga à geração de algo a outro" (Arist., Física, III, 8. 208a 8).

Pequenos detalhes podem ser levantados sobre o infinito de Anaximandro, e que se podem encontrar nas fontes doxográficas. Há textos que simplesmente se repetem. Também a estes não convêm esquecer, até porque se confirmam mutuamente.

O infinito, ou *ápeiron*, de Anaximandro não é uma substância intermediária, entre água e fogo, ou entre outros elementos, como se esta substância intermediária fosse algo também determinado. Não obstante, o uso do termo intermediário é possível, desde que se tome a cautela de o entender como sem determinações. Aristóteles falou, em diversos textos, de substância intermediária, todavia sem indiciar o nome do autor. Aparentemente ele parece referir-se a Anaximandro, porquanto assim têm acontecido quando se refere ao infinito.

"De acordo com aqueles, que dizem, que tudo é uma natureza única, por exemplo água ou fogo, ou algo entre estes" (Arist., Física, I, 6. 189b).

"Nenhum entre os físicos defende, que a unidade e o infinito é fogo e terra, mas água e ar e o meio entre eles" (Física, III, 5. 205b 27).

"Todos os físicos proponentes para o infinito outra natureza do que a dos elementos - água, ar e o meio entre eles..." (Física, III, 4. 203a 18).

"Considerando, que os elementos são necessários em número limitado, resta examinar, se eles são vários ou um só. Alguns decidem em favor de um só elemento, o qual para alguns é a água, para outros o fogo; finalmente outros dizem, que ele é mais subtil que a água, e mais denso que o ar e que, por causa de sua infinitude, ele abarca todos os céus" (Aristóteles, Sobre o céu, III 5. 303b 9).

"Alguns falam sobre o princípio como matéria, independentemente do facto que ele seja um ou muitos, ou que ele seja corpóreo ou incorpóreo. Assim quando Platão fala do grande e do pequeno, os itálicos sobre o infinito, Empédocles sobre o fogo, terra, água e ar, Anaxágoras sobre o número infinito de homeomérias (isto é, "partículas iguais"). Todos eles aludiram à tal causa, e também os que propuseram o ar, o fogo, a água ou algo mais denso que o fogo, mas mais subtil que o ar. Assim, alguns disseram que ele é o primeiro elemento" (Aristóteles, Metafísica, I, 7. 988a 23-33).

Alexandre de Afrodísio em seu comentário (60,2) acreditou, que este "mais denso que o fogo, porém mais subtil que o ar" fosse menção de Aristóteles a Anaximandro. Isto coincide contudo melhor com os discípulos de Anaxímenes, principalmente com Diógenes de Apolônia . A mesma interpretação pode-se aplicar ao texto abaixo:

"Aqueles que propõem algo mais denso do que o ar e mais subtil que a água" (Aristóteles, Metafísica, I 8. 989a 14).

Eis um texto que fala da mistura, certamente em parte uma informação imprecisa dada por Aristóteles:

"Tudo o que nasce, não somente acontece acidentalmente do não ente; tudo pode também gerar-se do ente, com a condição de que isto seja um ente em potencial e não de um actual. Eis o significado da unidade de Anaxágoras, e da mistura de Empédocles e Anaximandro, foi isto que Demócrito quis explicar, quando disse "tudo está misturado potencialmente e não actualmente" (Aristóteles, Metafísica, XII 2. 1069b 18-22).

"Alguns dizem, que a matéria, substrato destes (corpos), é uma só e supõem, que ela é ar ou fogo, ou algo intermediário entre si" (Aristóteles, Sobre a geração e a corrupção, II, 1. 328b).

"...ela não é de nenhum destes (quatro elementos), dos quais derivam todos os seres, nem de algo à parte entre eles, por exemplo, de algo entre ar e água, ou ar e fogo, mais denso que o ar e o fogo e mais subtil do os outros... ele não existe por si mesmo, como afirmam alguns sobre o infinito e o circundante" (Aristóteles, Sobre a geração e a corrupção, II, 5. 332a).

"Aristóteles denomina de físicos, aqueles que se ocupam desta parte da filosofia - a física - e entre eles principalmente aqueles, que trataram somente ou quase somente o princípio da matéria. Estes físicos estudaram a matéria dos seres gerados, e opinaram, que ela é o infinito ... Alguns, tendo suposto, que este elemento é único, disseram, que ele é infinito segundo a grandeza: assim a água para Tales, o ar para Anaxímenes e Diógenes, o meio para Anaximandro" (Simplicio, Física, 458, 19-26).

O carácter geral da filosofia de Anaximandro é monista. Pode-se também dizer, que esta filosofia é panteísta, porque o infinito pode ser dito de Deus.

Contudo, o infinito de Anaximandro é material, porque ele é concebido como base não determinada de todos os corpos.

O infinito é imortal e neste sentido ele é divino, apenas pela imortalidade.

"Desta natureza infinita nasceu o céu e o cosmos nele. Esta (natureza) é sem idade e sem velhice (fragmento 2 de Anaximandro), que circunda todos os cosmos" (Hipólito, Refutações, I 6, 1-7).

Note-se que, na poesia épica frequentes vezes é atribuída aos deuses a qualidade da imortalidade e do não envelhecimento.

"Viver sempre como este, que é imortal e jamais envelhece" (Homero, Ilíada XII 324).

"Tudo o que existe, ou é princípio, ou dele deriva. O infinito não começou; se ele tivesse tido começo, este seria o seu limite. Além disso, como princípio, ele não é nascido e indestrutível; porque tudo o que é gerado, terá necessariamente destruição, e toda destruição tem o seu limite. Por causa disso, conforme afirmámos, ele não tem começo, mas ele parece ser o começo de outros seres, e envolve e governa tudo, como asseveram aqueles, que não afirmam o infinito. Além disso ele é divino, porque ele é imortal e imperecível (Frag. 3 de Anaximandro) como afirma Anaximandro e a maioria dos físicos" (Aristóteles, Física, III 4. 203b 7).



O infinito de Anaximandro abriu a questão geral sobre o infinito. Ou melhor, o questionamento sobre o finito e infinito, como antinomia, para a qual uns pensam achar solução admitindo a realidade de ambas as formas, e outros (como Kant), que somente é possível resolver, pela negação de ambas, reduzindo tudo ao apriorismo das faculdades de conhecimento.

Face a algumas afirmações de Anaximandro e aos objectivos da sua teoria como explicadora da formação da diversidade das coisas, abriu-se também a questão das mudanças em si mesmas, e que teve no hilemorfismo de Aristóteles, uma formulação particular. Muito se aproxima, aliás, a teoria do infinito de

Anaximandro da do hilemorfismo de Aristóteles, o qual não fez senão oferecer uma proposta mais elaborada.

Os conceitos de Anaximandro sobre o infinito incorrem, como se advertiu, na discussão sobre o infinito em geral, cujo conceito importa discutir previamente.

Em princípio, nada parece poder-se explicar exhaustivamente no campo limitado do finito, sem uma redução ao infinito. O paradoxo é evidente. O problema é sobre o haver o finito, e sobre o haver o infinito.

De um lado, parece que o problema está em haver a multiplicidade. E esta, como se explicaria, senão pela unidade? O finito prende-se à multiplicidade. E como se explica o finito e toda a sua multiplicidade, senão pelo infinito? A questão, em última instância, está em saber, se o infinito é possível e como deve ser entendido para que seja possível.

Mas o paradoxo está, em que também a outra face parece de difícil explicação. Como é que pode haver o infinito, sem o finito, que nele cabe? Como é que pode haver a unidade, sem que haja a multiplicidade? Enfim, como é que há o rico, sem o seu contraste, o pobre? Como é que pode haver o grau máximo sem haver graus intermédios?

Nisto tudo acontece a complementaridade, em que um conceito evoca ao outro, e vice-versa. A solução parece ser, que em concreto, o máximo pode sempre haver, mas não necessariamente os graus. Estes podem ser em número infinito, mas em abstracto. O infinito intensivo contém todos os graus, sem que estejam realmente separados. Podem existir em concreto, como acontece nos seres finitos, mas não necessariamente. Só o infinito intensivo é necessário.

Dentro do quadro acima pode-se discutir, e avaliar as doutrinas do infinito, levantadas por Anaximandro, e que figuram historicamente como o levantamento filosófico da questão.

Evidentemente, quis, em primeiro lugar, o filósofo Anaximandro oferecer uma explicação para a variedade das coisas da natureza. Mas não o podia fazer sem envolver desde logo questões da mais alta metafísica, sobre a qual contudo não apresentou todos os detalhes necessários a uma compreensão total.

Anaximandro não buscou no infinito uma causa eficiente e que tivesse como efeito externo a criação das coisas. O que buscava era uma causa constitutiva, uma componente da realidade. O infinito, para Anaximandro é um elemento efectivo, um princípio.

O comentador Simplicio, citando Teofrasto, dirá, que Anaximandro introduziu este termo, com o sentido de princípio. Contudo ele usou possivelmente a palavra *arqué*, não como palavra especializada (ou palavra técnica).

A significação comum que ela tem em Anaximandro é suficientemente clara, para tornar-se termo especializado, no sentido de elemento constitutivo.

O infinito em Anaximandro, como elemento constitutivo, contém a imagem do ponto de partida, o qual permite infinitas novas opções. Portanto, o infinito está como potência real, sem se determinar necessariamente deste, ou daquele modo. É a potência real com variabilidade sem fim.

Não se trata do infinito em acto, ou seja, como infinito intensivo, que se tenha concretizado com todas as determinações ao mesmo tempo.

O infinito, eis um problema, cuja discussão sistemática principiou com Anaximandro, ainda que por ele não suficientemente esclarecido. Em princípio, seria o infinito algo possível? Se há diversas maneiras de conceber o infinito, qual seria efectivamente a maneira segundo a qual existe efectivamente o infinito?

Não sabemos, até que ponto Anaximandro distinguiu diversas modalidades de infinito, ou se ao menos as distinguiu até certo grau.

Há um infinito negativo (ou infinito por negação, privação, indeterminação, relativo) e um infinito positivo (ou intensivo, por acréscimo, absoluto).

O infinito positivo pode ser entendido sob certo ponto de vista, por exemplo, infinito pela quantidade, infinito pela qualidade (dito também infinito abstracto).

Este infinito intensivo, concebido em função a um só ponto de vista, é um infinito *secundum quid*, em vez de um infinito *simpliciter*.

Importa atender a tais conceitos, para se saber do que se fala exactamente, ao usar-se a noção de infinito. Poderá o infinito ser possível, conforme o ponto de vista adoptado, e não sob outro.

À primeira vista, todo o infinito é um infinito negativo, por causa do afastamento de todas as determinações dos seres finitos, ou seja pela negação de qualquer grau de limitação. Assim o compreendeu Anaximandro, quando advertiu que as determinações são contrárias entre si. Neste sentido, as essências excluem-se entre si.

Para ele, a água, o ar, a água, os contrários em geral são seres à parte, e para ele o infinito não contém em si tais formas. O infinito negativo é este infinito, que afasta de si todas as formas particulares, as quais limitam os seres e os distinguem entre si.

Se se afasta tudo o que é á parte do ente, acaso restaria ainda algo de positivo? Se restasse algo, o infinito estabelecer-se-ia como ente positivo e real. Mas isto apresenta-se impossível, porque este resto de infinitude deveria ser uma determinação. Não tem sentido algo estar reduzido a uma determinação particular e ao mesmo tempo ser um ser infinito. Um infinito particular, é somente possível ao modo de abstracção. Pela abstracção considera-se um aspecto, mas não o todo concreto.

O infinito intensivo, positivo, por acréscimo de tudo, é concebido pela soma de todas as determinações possíveis, as quais são todas levadas ao máximo.

Pergunta-se, pela possibilidade de um ente receber todas as determinações a um só tempo.

É possível conceber, que algumas formas admitem ser intensificadas indefinidamente, porque não são essencialmente limitadas. É o caso das propriedades da inteligência, da bondade e da beleza.

Sobre outras formas surgem imediatamente dificuldades. No campo da quantidade, seria possível o espaço infinito? O círculo infinito? O triângulo infinito? E o que seriam, a cor infinita, o gosto infinito e a dor infinita?

As formas especificamente finitas não admitem a intensidade ao infinito. Toda a forma essencialmente finita rejeita e expulsa a determinação que dela se

diferencia directamente. O círculo repele o quadrado. O grande é o contrário do pequeno. Os números repelem-se entre si. O vermelho, que cresce como vermelho, nunca se torna em azul. Nem a dor e o prazer, ambos crescendo, vão dar as mãos.

Já percebera Anaximandro, que alguns contrários não se conciliam, sendo esta a razão pela qual não admitia tomar como elemento básico da natureza aqueles seres que tivessem elementos contrários entre si.

Procurou, então dizer que na base da natureza o elemento fundamental era outro, e que o denominou de infinito. Mas, ao que parece, o que procurava dizer não era um infinito no sentido de intensivamente infinito. Também este está em oposição irreductível com as qualidades essencialmente finitas.

O infinito concebido por Anaximandro não é um infinito intensivo, ainda que ele o quisesse ter concebido assim. O infinito de Anaximandro é apenas o de constitutivo das coisas, no sentido de fonte inesgotável de determinações. Se tudo fosse acto pleno, ficaria simplesmente excluída a possibilidade de mudança das coisas.

Também não abordou Anaximandro a questão do tempo infinito, razão pela qual as coisas duram sempre. Este infinito do tempo (dito eternidade), é um problema sem dúvida difícil de equacionar.

Ainda que Anaximandro fale do movimento eterno, ele não explorou contudo esta modalidade de infinito.

Aristóteles fará este estudo, com resultados significativos, porque foi capaz de integrar o tempo e o espaço como determinações internas à mesma coisa, e não como algo separado. Não é possível o tempo absoluto, nem o espaço absoluto. O tempo não é um túnel através do qual seguem as coisas. Nem o espaço um oceano no qual navegam os átomos. As próprias coisas são o tempo e o espaço.

Também não examinou Anaximandro o infinito do ponto de vista da actualidade e potencialidade, ou seja, do ponto de vista da existência e da possibilidade de existir. Parménides advertirá, o que já é, é; o que não é, não é. Para a filosofia eleática não há passagem do não existente, para o existente (nada se cria).

Aristóteles lançará a teoria da divisão do ente em acto e potência, para permitir a mudança das coisas.

Ainda que os filósofos posteriores se tenham aprofundado em detalhes, o problema da possibilidade da mudança principia no questionamento de Anaximandro, quando advertiu que os contrários finitos não eram possíveis sem o infinito.

Sobre as causas eficientes que actuam nas mudanças pouco tratou Anaximandro. Geralmente os primeiros pré-socráticos (como é o caso dos antigos jónicos) advertem-se mais sobre os elementos, e menos sobre as causas que os movem.

Anaximandro de Mileto atribui ao infinito o *"eterno movimento, pelo qual o infinito gera o cosmos, o abarca e governa"* (Aristóteles, *Física*, III 4. 203b 7)

"Além disso, ele diz, que o movimento, no qual nascem os céus, é eterno" (Hipólito, *Refutações*, 1, 6,2). (vd também Aristóteles, *Física* VIII 1. 250b 11).

A diferença entre Anaximandro e Aristóteles está em que este último diz, que o Primeiro Motor move sem ser movido. Efectivamente, o infinito não pode ser móvel, nem ser um eterno movimento em si mesmo, mas sim um eterno gerador do movimento.

Conclui-se deste modo que embora Anaximandro esteja no caminho certo ao estabelecer o infinito como causa primeira do movimento, não o conceituou adequadamente.

*

Para uma noção correcta do infinito metafísico e para uma reflexão sobre as relações entre o finito e o infinito seria necessária uma filosofia complexiva que aliasse as especulações de Platão, Aristóteles, Plotino, Tomás de Aquino, Nicolau de Cusa e da filosofia do espírito alemão que englobasse e que fundisse num todo vivo a participação e a causalidade, a teoria do acto e potência e a analogia, o princípio expansivo de Plotino e dos neoplatónicos com a concepção de toda a filosofia cristã e de Tomás de Aquino sobre a libertação da criação e aliasse a abertura da transcendência do idealismo transcendental com a distinção entre o finito e o infinito. Só uma autêntica metafísica do acto de ser resolveria as antinomias aparentes e mostraria que a transcendência da acção humana implica no seu movimento a transcendência metafísica do acto de ser.

No entanto a luta pela compreensão do infinito matemático só começou com os paradoxos de Zenão, que apontavam para a impossibilidade de decisão entre as visões atomista finitista e continuísta não finitista, na segunda metade do século V a. C.

Vamos então ver num dos capítulos que se segue como os paradoxos de Zenão, foram cruciais nas especulações posteriores acerca da natureza do infinito.



O infinito matemático numa perspectiva histórica

A última coisa que se nos depara ao fazermos uma obra é saber aquilo que se deve pôr em *primeiro lugar*.

Blaise Pascal

Como terá entrado a noção de infinito na matemática ? Pela contemplação da vastidão dos desertos ou da imensidão das estrelas ? É um tema aliciante que suscita as mais diversas especulações filosóficas. Os hebreus, no seu *livro sagrado*, falam de «contar as estrelas, nomeando-as a todas» e de «contar os grãos de areia da terra» (ver anexo B).

Como entendiam os antigos o infinito ? Começemos por observar que a própria manipulação de números grandes pode apresentar sérias dificuldades e que muitos povos primitivos não dispunham de designativo para esses números grandes cingindo-se, por vezes, a «1,2,3 muitos».

A noção de infinito, num sentido muito amplo que inclui o ilimitado e o indefinido, aparece na Grécia já nos pré-socráticos, com a necessidade de pensar sobre a natureza dos entes matemáticos. A saber : é uma coisa «que não tem qualquer grandeza assinalável». Os átomos de Demócrito são uma infinidade e é também infinito o vácuo em que se encontram.

O infinito como problema ateniense com a infinita divisibilidade do contínuo surge com Zenão de Eleia no século V a. C. Os seus paradoxos, apontando para a impossibilidade da decisão entre as visões atomista finitista e continuísta não finitista, foram cruciais nas especulações posteriores acerca da natureza do infinito. Platão considera que há em todos os seres o limitado e o ilimitado e que, enquanto este é imperfeito, o limitado é perfeito. Deve-se a Aristóteles uma das mais influentes análises desta ideia, Aristóteles é um *finitista*, filósofo do universo fechado e limitado. Crítico dos paradoxos de Zenão, estabeleceu a distinção entre *infinito potencial* e *infinito actual*, idealizações puramente matemáticas.

A abstracção do infinito actual aplicada a processos construtivos de duração infinita, como a geração da sucessão dos inteiros positivos a partir do zero, ignora o facto de tais processos não acabarem e considera os resultados de tais processos na assunção de que terminaram, considerando, por exemplo, que os conjuntos foram de facto gerados. Os conjuntos criados são mentalmente entendidos como objectos «acabados». A abstracção do infinito actual permite considerar a sequência dos naturais como um objecto matemático.

A abstracção do infinito potencial aplicada a processos construtivos que podem ser indefinidamente estendidos, ignora quaisquer obstáculos espaciais, temporais

ou materiais à realização de cada passo do processo e considera cada passo desse processo potencialmente realizável. Na sequência dos naturais, é sempre possível acrescentar um novo número e é impossível esgotá-la subtraindo elementos. A aceitação desta abstracção com recusa do infinito actual está na base da fundação construtiva da matemática.

Só o infinito potencial é admitido por Aristóteles tanto na sucessão dos números, onde temos a potencialidade de escrever qualquer número natural, mas é impossível escrevê-los todos, como na dos pontos de uma linha, que é potencialmente infinitamente divisível.

Os estóicos, opositores ao finitismo aristotélico, conceberam o cosmos como realidade existente num vácuo estendido até ao infinito. Defensores da doutrina do *eterno retorno*, entendiam que havia, sucessivamente, uma infinidade de mundos.

Euclides, nos *Elementos*, usa o infinito em vários momentos. Em Euclides, o potencial do infinito não está meramente na linguagem, torna-se «operacional» envolvendo, por exemplo, a justificação das exaustões no «método de exaustão» de figuras, onde estas são *exauridas* à custa de quantidades infinitesimais. Incapaz de abarcar a ideia de um conjunto infinito actual, Euclides estabelecia os seus argumentos em forma de infinito potencial. Nos *Elementos* - livro IX, proposição 20 - a infinitude dos primos, sem menção explícita a infinito, tem uma formulação no seguinte teorema :

Os números primos são mais do que qualquer quantidade de números primos.

Para o pensamento cristão, o problema do infinito está ligado ao problema da eternidade, da criação a partir do nada, capacidade única de Deus, verdadeiramente eterno e infinito. O princípio aristotélico do infinito potencial conheceu várias objecções : às de ordem estritamente matemática vieram juntar-se as de natureza religiosa. Assim, nas *Oeuvres Philosophiques* de Descartes, p. 108, pode-se ler:

[...] e, porque não sabemos como imaginar quantas mais estrelas Deus pode criar, supomos que o seu número é indefinido. E nomeamos essas coisas indefinidas mais do que infinitas, de modo que a palavra infinito seja reservada só para Deus.

Descartes concebeu uma prova da existência de Deus mediante seguinte argumento:

Um ser finito jamais poderia conceber a ideia de infinito, eterno, imutável, onisciente, independente, omnipresente, a menos que o ser infinito houvesse depositado tal ideia no ser finito. Logo Deus existe !

Paradoxos de Zenão

*Zenão! Cruel Zenão! Zenão de Eleia!
Atravessaste-me com essa flecha alada
Que vibra, voa, e que não voa!
O som me faz nascer e a flecha me mata!*

Valéry

O filósofo grego Zenão propôs um paradoxo matemático por volta de 460 a. C. trazendo um sério problema para a doutrina pitagórica de que os "Números formam o céu todo", o qual não era o único problema, já que a escola enfrentava também os argumentos dos vizinhos eleáticos, um movimento filosófico rival. Os filósofos jônicos da Ásia Menor tinham procurado identificar um primeiro princípio para todas as coisas. Tales julgara achá-lo na água, outros preferiam pensar no ar ou no fogo como elemento básico. Os pitagóricos tinham tomado direcção mais abstracta, postulando que o número em toda a sua pluralidade era a matéria básica dos fenómenos. Esse atomismo numérico, lindamente ilustrado na geometria dos números figurativos, tinha sido atacado pelos seguidores de Parménides dentre os quais o mais conhecido foi Zenão, o eleático que enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. O método adoptado por Zenão era o dialético, antecipando-se a Sócrates nesse modo indirecto de argumento: partindo das premissas dos seus oponentes, ele reduzia-as ao absurdo.

Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade". Os elementos terminais, que constituíam uma pluralidade, de um lado eram supostos como possuindo as características da unidade geométrica - o ponto - e de outro como possuindo certas características de unidades numéricas. Aristóteles descrevia um ponto pitagórico como uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Sugeriu-se que foi contra tal visão que Zenão propôs os seus paradoxos, desafiando os conceitos de movimento e de tempo através de quatro paradoxos que criaram uma certa agitação, ainda hoje visível : o Estádio, Aquiles e a tartaruga, a Flecha e Fileiras em movimento.

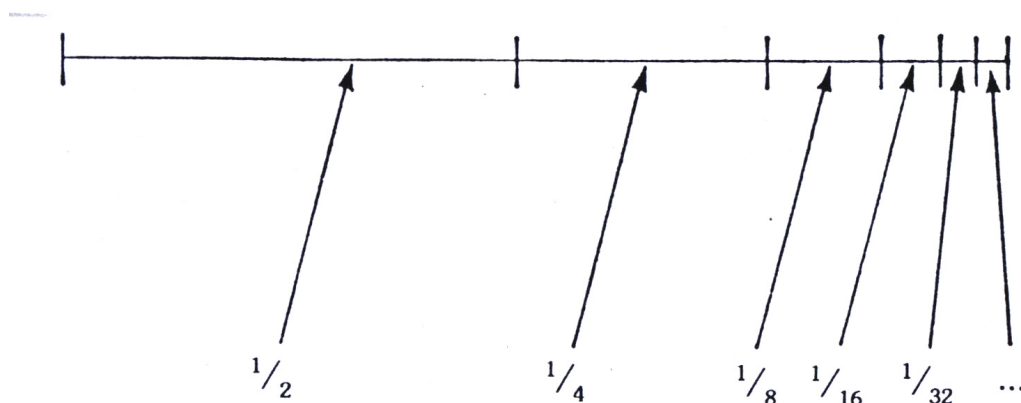
*

O Estádio

É impossível atravessar o estádio; porque, antes de se atingir a meta, deve primeiro alcançar-se o ponto intermédio da distância a percorrer; antes de atingir esse ponto, deve atingir-se o ponto que está a meio caminho desse ponto; e assim ad infinitum.

Kirk e Raven, 1979, p. 300-301

Por outras palavras, se admitirmos que o espaço é infinitamente divisível e que, portanto, qualquer distância finita contém um número infinito de pontos, chegamos à conclusão de que é impossível alcançar o fim de uma série infinita num tempo finito.



Porém, todos sabemos que é possível atravessar um estádio, ou percorrer qualquer distância finita num determinado período de tempo.

O argumento de Zenão está correctamente formulado, mas com base num pressuposto errado: o de que é impossível transpor parcelas infinitas de espaço num tempo infinito. De facto, uma coisa não pode, num tempo finito, entrar em contacto com coisas quantitativamente infinitas. No entanto, pode entrar em contacto com coisas infinitas no que diz respeito à divisibilidade porque, neste sentido, o próprio tempo é também infinito: o contacto com os infinitos é feito por meio de momentos infinitos em número.

*

Aquiles e a tartaruga

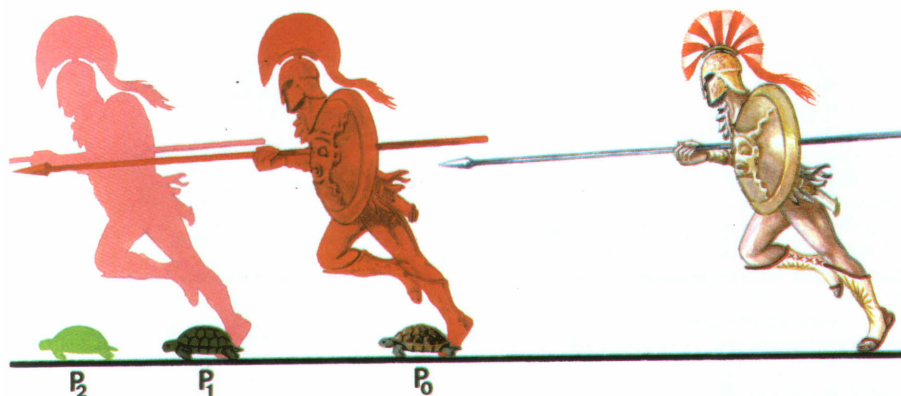
Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente, ad infinitum.

Kirk e Raven, 1979, p. 301-302

Se a tartaruga começa a corrida com certa vantagem sobre Aquiles, quando este alcançar a sua posição inicial P_0 , a tartaruga já se terá movido para a posição P_1 , por muito próxima que seja. Quando Aquiles chegar a P_1 , a tartaruga já estará em P_2 , e assim sucessivamente, pelo que parece que Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga. Contudo, se supusermos que Aquiles corre dez vezes mais depressa que a tartaruga e que demora um segundo a chegar a P_0 , ele precisaria de uma décima para chegar a P_1 , uma centésima para chegar a P_2 , ... mas

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{9}$$

pelo que em um segundo e $1/9$ conseguirá alcançá-la. Num segundo e duas décimas tê-la-á ultrapassado. A intuição fracassa ao julgar que uma soma de termos infinitos positivos há-de dar necessariamente infinita.



Deste modo, numa corrida, o perseguidor nunca poderia atingir o perseguido, mesmo que fosse mais rápido que este. A teoria do espaço que está aqui implícita é a que supõe o conceito de infinitamente divisível.

Este paradoxo, em conjunto com o do estádio, visa a desacreditação do movimento "contínuo".

A demonstração de Cantor de que a totalidade de um conjunto infinito (tal como o número de pontos do percurso) não tem de ser maior do que as suas partes (tal como os segmentos do percurso) clarifica este aspecto do paradoxo de Aquiles

e a Tartaruga: Aquiles não tem de percorrer mais pontos do que a Tartaruga, ele tem de percorrer exactamente os mesmos - um número infinito de pontos.

A questão acerca da forma como os corredores podem percorrer um número infinito de pontos numa porção finita de tempo (ou tempo dividido num número infinito de instantes) é resolvida em parte pela teoria dos irracionais de Cantor, que mostra que a soma de uma série infinita de números racionais pode ser um número finito, e em parte pela teoria da unificação do espaço-tempo de Einstein.

*

A Flecha

Um objecto está em repouso quando ocupa um lugar igual às suas próprias dimensões. Uma seta em voo ocupa, em qualquer momento dado, um espaço igual às suas próprias dimensões. Por conseguinte, uma seta em voo está em repouso.

Kirk e Raven, 1979, p. 302

O objectivo deste argumento é provar que a seta voadora está em repouso, tendo em conta a hipótese de que o tempo é composto de momentos. Se não admitirmos esta hipótese, a conclusão não tem viabilidade.

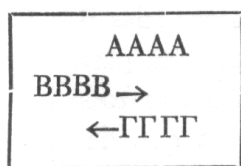
Facilmente se pode observar que este argumento, ao contrário dos dois que o precederam, trata igualmente o espaço e o tempo como algo composto de mínimos indivisíveis.

*

As fileiras em movimento

O quarto argumento é o que diz respeito a duas filas de corpos, sendo cada fileira constituída por igual número de corpos do mesmo tamanho, passando uma pela outra numa pista de corridas, à medida que avançam, com igual velocidade, em direcções opostas; uma das fileiras ocupa inicialmente o espaço entre a meta e o ponto médio da pista e a outra o espaço entre o ponto médio e a posição de partida.

Kirk e Raven, 1979, p. 302-303



- A ὄγχοι ἐστῶτες
 B ὄγχοι κινούμενοι ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε
 Ε Γ ὄγχοι κινούμενοι ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Δ
 Δ ἀρχὴ τοῦ σταδίου
 Ε τέλος τοῦ σταδίου

- Legenda : **A** = corpos estacionários
 B = corpos que se movem de Δ para Ε
 Γ = corpos que se movem de Ε para Δ
 Δ = ponto de partida
 Ε = meta

Quando a fileira dos **B**'s e dos **Γ**'s passam uma pela outra, o primeiro **B** alcança o último **Γ** no mesmo momento em que o primeiro **Γ** alcança o último **B**. Neste momento, o primeiro **Γ** passou todos os **B**'s, enquanto que o primeiro **B** passou apenas metade dos **A**'s e, por consequência, gastou apenas metade do tempo dispendido pelo primeiro **Γ**, uma vez que cada um dos dois leva mesmo tempo a passar por cada corpo.

De acordo com o exposto, Zenão afirma que isto

(...) implica a conclusão que metade de um dado tempo é igual ao dobro desse tempo.

Kirk e Raven, 1979, p. 302-303

O único erro do raciocínio está, uma vez mais, em considerar um pressuposto de base errado: a hipótese de que um corpo leva o mesmo tempo a passar, com igual velocidade, por um corpo que está em movimento e por um corpo do mesmo tamanho que está em repouso.

A questão central dos paradoxos de Zenão reside na impossibilidade de considerar segmentos de espaço e de tempo como sendo formados por uma infinidade de elementos individuais e, não obstante, separados uns dos outros, isto é, descontínuos. Zenão sabia, evidentemente, que Aquiles podia apanhar a tartaruga, que um corredor pode percorrer o estádio, e que uma seta em voo se move. Pretendia simplesmente demonstrar as consequências paradoxais de encarar o tempo e o espaço como constituídos por uma sucessão infinita de pontos e instantes individuais consecutivos como as contas de um colar.

A solução destes paradoxos exige uma teoria como a Cantoriana, que combina a nossa noção intuitiva de pontos e acontecimentos individuais com uma teoria sistemática de conjuntos infinitos.

Giordano Bruno e a infinidade do universo

O coração tem razões que a própria razão desconhece.

Blaise Pascal

Giordano Bruno é um homem do Renascimento, ou seja, integra-se num movimento cultural que conserva os resíduos da filosofia da Idade Média mas que possui simultaneamente os gérmenes dos tempos novos.

Nascido em Itália, na localidade de Nola (Campânia), em 1548, Giordano Bruno era sobretudo um inconformado e um insatisfeito que percorreu a Europa do seu tempo ensinando em algumas das mais famosas universidades de então, tais como Toulouse, Paris, Oxford, Witemberg e Zurique.

O seu pensamento filosófico assenta numa exaltação da Natureza, diferenciando-se, porém, do naturalismo empírico de Telésio e do naturalismo ocultista de Paracelso. Para Giordano Bruno, o universo está penetrado da vida divina; não é uma coisa realmente distinta de Deus, mas antes um espelho onde Deus se contempla. Deus é infinito e o Cosmos, que é a manifestação da sua essência, deve ser também infinito. A perfeição divina oferece-se numa inumerável série de mundos. Deus é a *natura naturans*, isto é, a verdadeira causa geradora do Universo, e este é a *natura naturata*, ou seja, a totalidade dos efeitos possíveis. A Natureza é distinta de Deus. Sem estar separada d'Ele, é sua filha unigénita. Deus não é corpo nem é espírito, mas sim a unidade ou o ser. Deus não é o criador que tira o mundo do nada, não é a causa transcendente, mas imanente, é a alma que vivifica o Cosmos, como o é em relação ao nosso corpo a alma individual.



Na opinião de Giordano Bruno, o único efeito digno de uma causa infinita como é Deus é um Universo infinito. «A extensão infinita», diz, «desde o momento que não é uma magnitude, coincide com o indivíduo, e a multitude infinita, porque já não é um número, coincide com a unidade».

O Universo é, assim, uma *explicatio*, isto é, um desenvolvimento mediante o qual o dinamismo divino se manifesta. Ora bem, o processo pelo qual a inteligência humana se esforça por compreender aquele desenvolvimento é um processo

compositivo (Deus é a *complicatio omnium*). Giordano Bruno coloca os sentidos num plano inferior, já que os considera meras faculdades ligadas à matéria, destinadas ao conhecimento do fugaz e passageiro, dos factos isolados, do individual, do imperfeito. A razão, pelo contrário, aspira ao absoluto, mesmo quando não pode alcançá-lo em si mesmo. Deus, enquanto tal, é objecto de crença; é compreensível (acessível) só como alma do mundo porque só enquanto tal se revela à contemplação humana.

Para os sentidos, as coisas são, aparentemente, diversas e múltiplas, mas para a razão, tudo é, na realidade, uno; as coisas contrárias harmonizam-se; o defeituoso e o incompleto desaparecem no seio da unidade absoluta. A evolução do Universo é como um eterno devir que ascende desde as formas mais imperfeitas para atingir as mais perfeitas, que passa da inércia à vida, da vida à morte e assim eternamente sem cessar.

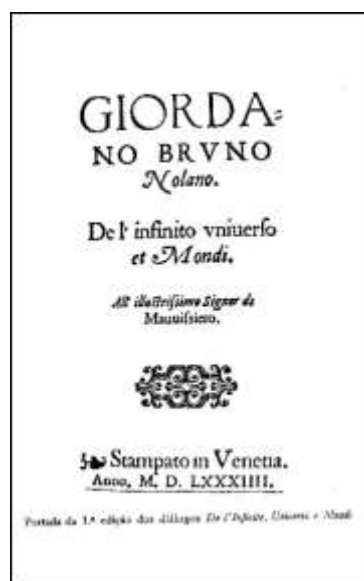
Dotado de uma poderosa imaginação e de uma natureza profundamente apaixonada, a filosofia de Giordano Bruno é um reflexo da sua vida. O carácter das suas doutrinas não varia; o mais que consegue é tomar novas matizes segundo o curso das suas meditações pessoais.

Profundamente inovador, ele foi um dos primeiros a defender a Teoria de Copérnico, e se a sua cosmografia não é geocêntrica, a sua concepção filosófica não é antropocêntrica, mas teocêntrica.

Por ter adoptado a Teoria de Copérnico, segundo a qual a Terra e os outros planetas giram à volta do Sol, e admitido a infinitude do Universo, além de uma infinidade de mundos, Giordano Bruno foi queimado vivo pela Inquisição. O episódio ocorreu a 17 de Fevereiro de 1600, em Roma.

As chamas que lhe devoraram o corpo não lhe consumiram as ideias, as quais permaneceram e se disseminaram através dos tempos, vindo a influenciar filósofos tais como Schelling, Hegel, Krause e Leibniz, entre outros.

Mais do que as suas ideias filosóficas ou científicas, os inquisidores quiseram sobretudo destruir o perigoso exemplo que representava a audácia e a coragem de um homem, antigo padre dominicano, que desafiou os poderes instituídos e que, mesmo diante da fogueira, recusou retractar-se, preferindo morrer a abjurar a verdade em que acreditava, ou seja, «uma verdade cuja defesa lhe pareceu mais preciosa do que salvar a própria vida», como diz Eugen Drewermann, no seu livro «Giordano Bruno ou o Espelho do Infinito».



Mas qual foi então o tenebroso crime desse agitador do conhecimento e do saber?

Embora o seu processo se tivesse perdido, foi possível fazer uma reconstituição do seu conteúdo, nomeadamente, identificar as oito proposições heréticas que a Inquisição retirou dos seus livros.

Na primeira daquelas obras, Bruno critica a cosmologia de Aristóteles e rompe com o mundo das esferas, adoptando a teoria de Copérnico, segundo a qual a Terra e os outros planetas giram à volta do Sol. Giordano Bruno não se fica por aí e ultrapassa o próprio Copérnico, ao admitir a infinitude do Universo e uma infinidade de mundos.

O seu raciocínio é mais ou menos este: Deus é infinito, e o Cosmos, que é a manifestação da essência divina, deve ser também infinito. A perfeição divina oferece-se numa inumerável série de mundos. Em sua opinião, seria absurdo pensar que um Deus infinito tivesse gerado um efeito finito e imperfeito. «Por que quereis que esta Divindade que pode estender-se infinitamente numa esfera infinita, se reconcentre com parcimónia em si mesma e prefira permanecer estéril a comunicar-se com uma mãe fecunda e cheia de formosura?... Porquê privar da existência os mundos possíveis e alterar na sua perfeição a imagem divina?», interrogava.

Simplemente, o modelo de Copérnico era para a Igreja da época intolerável, na medida em que entrava em contradição com a Bíblia, nomeadamente com um episódio segundo o qual Josué, durante uma batalha, levantara o braço e mandara parar o Sol. Ora, se o Sol parou, é porque era ele que se movia e não a Terra.

É particularmente curioso como Giordano Bruno iniciou os seus diálogos *Acerca do Infinito, do Universo e dos Mundos*, publicado em 1584 :

Elpino - Como é possível que o Universo seja infinito ?

Filóteo - Como é possível que o Universo seja finito ?

Elpino - Julgam que se pode demonstrar essa infinidade ?

Filóteo - Julgam que se pode demonstrar essa finidade ?

Elpino - De que extensão falas ?

Filóteo - E tu de que limites falas ?

De acordo com Emile Namer (no seu livro «Giordano Bruno ou o Universo Infinito como Fundamento da Filosofia Moderna»), uma das heresias que Giordano Bruno deveria abjurar era a teoria do universo infinito e da multiplicidade dos mundos, que se opunha à ideia da criação no tempo.

Foram, pois, oito as asserções heréticas que foram formuladas pelos inquisidores ao fim dos cerca de oito anos que durou o processo. Havia agora que convencer Bruno a abjurá-las, para bem de todos, mas ele recusou-se a fazê-lo,

«manteve até à hora decisiva a audácia de proclamar uma esperança transbordante de segurança sobre o sorte da sua alma, quando as severas ameaças da Igreja colocavam diante dos seus olhos uma certeza tenebrosa», como salienta Drewermann.

Segundo o relato de Kaspar Schopp, testemunha presencial dos últimos momentos de Giordano Bruno, o «frade apóstata» e «herege obstinado», foi exortado com toda a caridade a reconhecer o seu erro. « *Mas ele perseverou até ao fim na sua condenada rebeldia e a sua mente e a sua inteligência transtornaram-se com mil erros; nem sequer cedeu na sua contumácia quando os guardas o conduziram à Praça das Flores. Aí foi despojado das suas roupas, atado a um mastro e queimado vivo. Durante todo esse tempo esteve acompanhado pela nossa congregação, que constantemente entoaram litanias, enquanto que os consoladores tentavam até ao último momento quebrar a sua tenaz resistência, até que, por fim, acabou a sua vida miserável e desgraçada* ».

Ao lançarmos hoje um olhar sobre a coragem e resistência de Giordano Bruno, não podemos deixar de o comparar com o «realismo» de Galileu Galilei e sobretudo não podemos deixar de recordar os versos de um antigo poeta jónico, que viveu no século VII, a.C., Arquíloco, quando escreveu: «De um Trácio é agora o meu tão belo escudo./ Que havia eu de fazer? Perdi-o na floresta./ Mas salvei a minha pele, no aceso da luta./ Sei bem onde comprar um escudo novo.»

*

Os filósofos racionalistas do século XVIII sustentaram a infinidade do universo e usaram a noção de infinito nas suas especulações cosmológicas. Hoje são aduzidos argumentos de ordem astronómica contra a infinitude do universo. É uma questão que continua a atrair filósofos, cosmólogos, astrónomos ... e muitos curiosos.

Do Mundo fechado ao Universo infinito

A mais inamovível de todas as barreiras da Natureza é aquela existente entre os pensamentos do Homem e os de outro.

William James

De acordo com Ferrater Mora (1986), a passagem do "finitismo" ao "infinitismo" cumpriu-se sobretudo durante o século XVII, e de muito diversas maneiras, no curso da revolução científica e filosófica que Koyré descreveu como a "destruição do Cosmos":

(...) a desapareição da concepção do mundo como um todo finito, fechado e hierarquicamente ordenado e a sua substituição por um universo indefinido e inclusive infinito, universo cimentado pela identidade das suas leis e das suas componentes fundamentais, e no qual tais componentes se encontram ao mesmo nível do ser (...)

No seu livro *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito*, Alexandre Koyré traçou as etapas da revolução espiritual que, nos séculos XVI e XVII:

(...) modificou os fundamentos e os próprios quadros de pensamento, revolução de que a ciência moderna é, ao mesmo tempo, raiz e fruto.

Esta obra relata a história da "destruição do Cosmos", isto é, do mundo concebido como um todo finito e bem ordenado, de acordo com a concepção aristotélica do espaço, e a sua substituição pela concepção da geometria euclideana, que considera o espaço como extensão necessariamente homogênea e infinita.

Para Koyré, a destruição do cosmos deve ser entendida como:

(...) a destruição do mundo concebido como um todo finito e bem ordenado, no qual a estrutura espacial encarnava uma hierarquia de valor e de perfeição, mundo no qual, "acima" da Terra pesada e opaca, centro da região sublunar da mudança e da corrupção, se "elevavam" as esferas celestes dos astros imponderáveis, incorruptíveis e luminosos, e a substituição deste por um universo indefinido, e até mesmo infinito, não suportando já nenhuma hierarquia natural e unido apenas pela identidade das leis que o regem em todas as suas partes, assim como pela dos seus componentes últimos, colocados,



todos eles, ao mesmo nível ontológico.

E a geometrização do espaço, estreitamente ligada à destruição dos cosmos, deve ser percebida como:

(...) a substituição da concepção aristotélica do espaço, conjunto diferenciado de locais intramundanos, pela do espaço da geometria euclidiana - extensão homogénea e necessariamente infinita -, daqui em diante considerada como idêntica, na sua estrutura, ao espaço real do universo. O que por sua vez, implicava a rejeição pelo pensamento científico de todas as considerações baseadas nas noções de valor, de perfeição, de harmonia, de sentido ou de fim, e finalmente a desvalorização completa do ser, o divórcio total entre o mundo dos valores e o mundo dos factos.

Segundo o autor, a nova cosmologia no séc. XVII provocou a substituição do mundo geocêntrico dos gregos e do mundo antropocêntrico da idade média por um universo descentrado. O homem passou então de espectador da natureza a seu mestre e possuidor, substituindo o cuidado com o "outro mundo" pelo interesse neste, convertendo os seus fins transcendentos nos objectivos imanentes.

Deste modo, o homem perdeu o seu lugar como centro do mundo, ou melhor, perdeu o mundo que formava o quadro da sua existência e o objecto do seu saber, tendo sido obrigado a modificar e adaptar as suas concepções fundamentais e as próprias estruturas de pensamento.

*

Tanto a ciência como a filosofia e a teologia têm manifestado um legítimo interesse pelas questões relativas à natureza do espaço e da matéria, da estrutura da acção e da causalidade, bem como pelas que se referem à natureza, estrutura e valor do pensamento e da ciência humanos. No entanto, os problemas colocados pela infinitização do universo são demasiado profundos e as soluções encontradas têm sempre implicações demasiado vastas e importantes para que seja possível um progresso contínuo e constante.

O embrião do conceito matemático

Querer a verdade é confessar-se incapaz de a criar.

Friedrich Nietzsche

Durante milénios, até ao século XIX, a ideia de infinito era qualquer coisa muito mal definida. Para os inclinados ao espiritualismo tinha vagas conotações teológicas e para os outros, incluindo cientistas e matemáticos, era um salto para qualquer coisa que se encontra fora dos limites do pensamento racional. Ao olhar assim com receio o infinito, somos, conforme G. Bernard Shaw escreveu em *Man and Superman*, como o bosquímano que não pode contar além dos seus dedos, "para ele ... 11 é uma miríade incalculável".

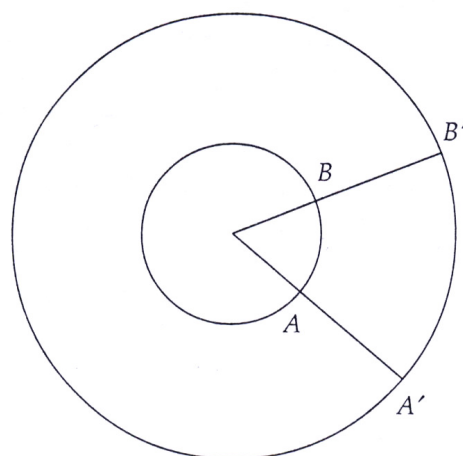
Pelo século XVII, os cientistas e matemáticos começaram a falar como se o infinito pudesse vir algum dia a tornar-se um conceito racional mas, não obstante, continuava a ser para eles um tema genérico, que se referia a toda e qualquer coisa incompreensivelmente grande. Não havia nenhuma distinção entre infinitos.

Galileu, nos *Diálogos Respeitantes a Duas Novas Ciências*, exprime a sua crença de que uma linha de 3 cm de comprimento contém tantos pontos - um número infinito - como uma linha com o dobro do comprimento. Ele aceitava o paradoxo como podia fazê-lo uma pessoa para quem o universo não seria nem mais nem menos acessível, tivesse ele metade ou o dobro do tamanho.

No século V Proclo, no seu famoso *Comentário sobre os Elementos de Euclides*, observa que o diâmetro da circunferência a divide em duas metades, pelo que deve haver duas vezes mais metades do que diâmetros.

E haverá ?

Os filósofos medievais concluíram que duas circunferências concêntricas podiam fazer-se corresponder do modo que mostra a figura abaixo : os pontos A e A', colineares com o centro, correspondem-se, como B e B'. Logo, uma circunferência pequena tem tantos pontos como uma grande.



Em *Discursos Matemáticos e Demonstrações*, Galileu identifica a propriedade fundamental de, num conjunto infinito, a parte equivaler ao todo, isto é, "a cada elemento da parte corresponde um único elemento do todo, e vice versa". Dessa obra transcrevemos um excerto de um interessante diálogo entre as personagens Salviati, Sagredo e Simplicio.

Salviati levanta a questão :

Se te perguntar quantos são os quadrados perfeitos, podes responder-me, sem mentir, que são tantos quantas as respectivas raízes quadradas ; visto que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, não há nenhum quadrado que tenha mais de uma raiz nem uma raiz que tenha mais de um quadrado.

Perante tal afirmação, Sagredo interroga :

O que há a concluir nesta situação ?

Ao que Salviati responde :

Pelo que vejo, só podemos inferir que o número de quadrados é infinito e o número das suas raízes é infinito ; nem o número de quadrados é inferior à totalidade dos números, nem o último menor que o primeiro ; e, finalmente, os atributos «igual» , «maior» e «menor» não são aplicáveis às quantidades infinitas, mas apenas às finitas.

Quando, portanto, Simplicio apresenta várias linhas de comprimentos diferentes e pergunta como é possível que a mais longa não contenha mais pontos que a mais curta, respondo-lhe que uma linha não contém mais, nem menos, nem mesmo igual número de pontos, que outra, mas que cada linha contém um número infinito.

Como pode haver tantos quadrados como números se nem todo o número é um quadrado perfeito ? Comportando-se o infinito de modo tão insólito, não valeria a pena evitá-lo ? Seria o infinito uma espécie de inferno ao qual era preferível não descer ?

Galileu teria em mente escrever uma obra matemática sobre o infinito, projecto jamais executado.

Um século depois de Galileu, os paradoxos do infinito como os citados, tinham aumentado de número e de seriedade. Em 1851, num pequeno livro escrito em alemão intitulado *Paradoxien der Unendlichen* (Os Paradoxos do Infinito), o matemático checo Bernhard Bolzano, ordenado padre em 1804, tentou realizar o primeiro tratamento inteiramente racional do assunto pelo qual sentia grande atracção. Porém, como resultado, não nos deixou de certeza mais próximos do infinito do que estávamos antes, se é que não ficámos ainda mais afastados. Mas

foi Bolzano o primeiro a «actualizar» o conceito de infinito, ao propor a seguinte definição de conjunto, na qual as colecções são consideradas um todo :

"Chamo conjunto a uma colecção na qual a ordem das respectivas partes é irrelevante e na qual nada de essencial muda se apenas a ordem for mudada."

A contribuição de Bolzano já só apresenta, hoje, interesse histórico.

Cerca de 1877, Dedekind publicou a sua construção dos reais a partir dos racionais. Na sua segunda publicação sobre a natureza e o significado dos números, intitulada *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, afirma que:

"Os números são livres criações do espírito humano, servem como um meio de apreensão mais fácil e mais preciso da diferença das coisas."

Mas Kronecker adoptou uma visão diferente, ao afirmar que *"Deus fez os inteiros, sendo o resto obra dos homens."*

Nestas diferentes perspectivas, uma considerando os números uma criação do espírito humano e outra uma dádiva de Deus, reside a essência das duas posições matemáticas sobre o infinito potencial e actual, cuja distinção só seria feita mais tarde. Dedekind deu pela primeira vez uma definição para conjunto infinito, definindo-o como

"aquele para o qual existe uma correspondência um-a-um (bijecção) entre si e uma parte de si próprio"

*

O paraíso de Cantor

A essência da matemática é a sua liberdade.

Georg Cantor

Cantor era filho de cristãos de ascendência judia. Não tinha mais de 6 anos quando se publicou o primeiro livro de Bolzano. Desde sempre se interessou pelos argumentos medievais dos teólogos sobre o infinito e a continuidade. Se os matemáticos estão actualmente mais próximo de compreender o infinito do que em qualquer outra época, deve-se principalmente à incisiva imaginação de Georg Cantor, um génio que experimentou o amargo sabor da incompreensão de muitos dos seus pares. Professor na pequena Universidade de Halle, sempre ansiou por um posto na Universidade de Berlim.



Cantor, que não tencionava debater o seu caminho para o infinito, como outros matemáticos no último quartel do século XIX, sentiu-se motivado por descobertas então recentes, que punham em causa a veracidade da geometria como fundamento da matemática. Os matemáticos encontravam-se num estado de pânico intelectual, trabalhando no sentido de substituir a geometria euclidiana por uma nova pedra basilar que, como acreditavam, deveria ser aritmética e não geométrica. Mais concretamente, deveria ser um corpo de doutrina baseado conceptualmente nos números inteiros, fracções e números irracionais (números decimais que, como π , não são fracções), e não em pontos, linhas e planos. Era um objecto vasto, mesmo vago, e os diferentes caminhos tomados pelos matemáticos conduziram-nos em diversas direcções. As suas passadas levaram-no até ao infinito e, coisa absolutamente inesperada, ainda mais além.

É Cantor que traz ao mundo científico a moderna teoria de conjuntos, que apareceu como novo ramo da matemática em 1883, com o seu ensaio sob o título *Dos conjuntos Lineares*, e que foi o primeiro a tratar do verdadeiramente infinito como uma entidade matemática definida. A seguinte passagem do ensaio revela claramente a forma como Cantor atacou o problema :

"É da tradição considerar-se o infinito como uma coisa infinitamente crescente ou com a forma, com aquela intimamente relacionada, de uma sequência convergente, que ele adquiriu durante o séc. XVII. Pelo contrário, concebo o infinito como qualquer coisa perfeitamente acabada, qualquer coisa capaz, não apenas de formulações matemáticas, mas ainda de definição pelo número. Esta concepção de infinito é contrária às tradições que se tornaram queridas; e foi

muito contrafeito, que me vi obrigado a aceitar este ponto de vista. Todavia, vários anos de meditação e experiência científica, indicam estas conclusões como uma necessidade lógica, e por esta razão me convenço de que não se poderão levantar objecções válidas que eu não me encontre em posição de enfrentar”.

As ideias de Gauss a este respeito eram universalmente respeitadas, e podemos imaginar a tempestade que levantou no campo dos ortodoxos o desafio declarado de Cantor. Foi providencial para Cantor a sua madura reflexão tê-lo insensibilizado para fazer face ao ataque, porque durante anos teve de suportar esta batalha sozinho. A história da matemática ainda não registou nada que se lhe igualasse em violência. Os começos tempestuosos da teoria dos conjuntos mostram bem que, nem mesmo num campo tão abstracto como é a matemática se podem eliminar por completo as emoções humanas.

*

Cantor começou esta viagem da mente considerando uma finita *"coleção [...] de objectos, bem definidos e distintos, da nossa intuição ou pensamento"*, a que deu o nome de *"conjunto finito"*. Com o propósito ostensivo de inventar fundamentos aritméticos para a matemática, considerou conjuntos específicos de números, mas a sua definição também servia para conjuntos dos meses do calendário, de pessoas ou do que quer que fosse.

Podemos imaginar pontos distribuídos ordenadamente sobre uma recta ou eixo ordenado. Se todos os racionais forem colocados sobre essa recta será impossível encontrar "buracos" nessa linha: entre dois números, por exemplo $1/2$ e $2/3$, existe um outro número, $7/12$; entre $1/2$ e $7/12$ existe $13/24$, e entre estes existe ainda outro, e assim sucessivamente... Isto é, parecerá que os pontos estão unidos entre si. Na terminologia de Cantor, existe uma correspondência biunívoca entre todos os pontos da linha e todos os números racionais.

Este sistema de números - os racionais - era aquele que Pitágoras acreditava que regia o Universo. No entanto, até Pitágoras sabia que este sistema estava incompleto: há pontos da recta que não estão preenchidos por pontos associados a números racionais, como se pode verificar facilmente marcando sobre ela a hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos catetos meçam uma unidade. O ponto determinado pelo comprimento da hipotenusa, $\sqrt{2}$, não tem equivalente numérico no sistema racional de números.

Teorema : $\sqrt{2}$ não pode ser um racional.

Demonstração :

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros e a fracção é irredutível. Logo

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ie} \quad 2q^2 = p^2$$

de onde se pode concluir que p^2 é par. Mas se p^2 é par, p também o é pois se p fosse ímpar, ie, $p = 2k - 1$ ter-se-ia

$$p^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

o que contraria a hipótese de p^2 ser par.

Assim, $p = 2a$ para algum inteiro a . Logo

$$2q^2 = 4p^2 \quad \text{ie} \quad q^2 = 2p^2$$

donde se conclui, pelo raciocínio anterior, que também q é par.

Logo $\exists b \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2b$ e portanto $\frac{p}{q} = \frac{2a}{2b}$ não é uma fracção irredutível, contrariando a hipótese.

∴

Assim, nem todos os pontos da linha estavam efectivamente preenchidos pelo que não há correspondência biunívoca entre todos os pontos e todos os números.

O comprimento da hipotenusa do triângulo rectângulo de catetos unitários é irracional; para preencher as lacunas na linha, os números irracionais têm de ser introduzidos no sistema. Mas com que fundamento, para além da conveniência e da necessidade, é que eles são introduzidos? E será que a sua admissão resulta no preenchimento de todos os espaços? Foram estas as questões que Cantor se propôs responder, e ao respondê-las transformou radicalmente a ideia acerca daquilo que o número é.

A sua abordagem do problema foi tão simples que a sua solução chegou a ser considerada por muitos como simplesmente ridícula. Cantor começou por contar

todos os inteiros, todos os números racionais, e todos os números reais. Obviamente, não pode contar todos os números, porque há um número infinito de cada tipo, mas Cantor não estava interessado em saber exactamente quantos números existem; quis foi descobrir quantos de cada tipo estavam em relação com os de outros tipos. Para isso seguiu o caminho que seguiria qualquer pessoa que não soubesse contar. Se lhe fossem dadas duas caixas com bolas e lhe perguntassem qual tinha mais, ela poderia facilmente descobrir tirando simultaneamente uma bola de cada caixa; se uma caixa ficasse vazia antes da outra, essa caixa tinha menos bolas; se ambas ficassem vazias ao mesmo tempo, elas continham a mesma quantidade de bolas.

Cantor fez a mesma coisa, mas em vez de usar bolas usou números; e em vez de usar caixas usou aquilo a que ele chamou conjuntos ou classes. Cantor decidiu que os membros dos conjuntos com que trabalharia seriam todos números, tendo uma propriedade em comum. Assim, os membros de um conjunto seriam os números pares, de outro os ímpares, de outro os naturais, e assim sucessivamente. Cantor procedeu então à comparação do "tamanho" ou cardinalidade destes conjuntos emparelhando os seus elementos.

De acordo com os postulados em que Cantor se baseou, um conjunto seria equivalente em «tamanho» a outro, isto é, ambos teriam a mesma *cardinalidade*², se cada elemento de um conjunto pudesse ser emparelhado com um único elemento de um outro conjunto. Segundo esta definição, pode procurar-se a equivalência de grandes conjuntos, como o dos lugares dum estádio e o dos espectadores que os ocupam para assistir a qualquer acontecimento: se houver espectadores sem lugar, ou se sobrarem lugares não ocupados, os dois conjuntos não são equivalentes.

A definição de Cantor não exige que contemos, ou mesmo que conheçamos, as populações dos dois conjuntos para determinar se são ou não equivalentes. Foi isto, em última análise, que possibilitou a Cantor comparar e discriminar racionalmente diversos infinitos, isto é, mais precisamente, conjuntos de populações infinitamente grandes.

Definição

Dizemos que os conjuntos A e B são equipotentes (isto é, têm a mesma *cardinalidade*), e escreve-se $A \sim B$, se existir uma bijecção³ entre A e B .



A equipotência é uma relação de equivalência, isto é, para quaisquer conjuntos A , B e C tem-se

² Recorde-se que a cardinalidade de um conjunto A finito define-se como o número de elementos deste conjunto A e denota-se por $|A|$ ou por $\#A$.

³ Por sua vez, uma bijecção (ou aplicação bijectiva) é uma aplicação simultaneamente injectiva e sobrejectiva, isto é, cada elemento do conjunto de chegada é imagem de um único elemento do domínio.

- (a) $A \sim A$
- (b) Se $A \sim B$ então $B \sim A$.
- (c) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Demonstração

- (a) A identidade em A , id_A , é uma bijecção.
- (b) Se $f : A \rightarrow B$ é uma bijecção, então $f^{-1} : B \rightarrow A$ é bijectiva.
- (c) Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são bijecções, então $g \circ f : A \rightarrow C$ é bijectiva.

Com estas poucas e primitivas ideias em mente, Cantor deu então o primeiro passo para o Infinito. Afirmava que qualquer conjunto finito pode ser usado como degrau na definição de outro conjunto finito maior, e assim sucessivamente até ao infinito. Em cada passo, o conjunto maior compreende todos os subconjuntos que é possível extrair do conjunto imediatamente abaixo, entendendo por subconjunto quer um conjunto com nenhum, quer com alguns, quer ainda com todos os elementos dum dado conjunto. Ao conjunto vazio, habitualmente designado por ϕ , é dado o nome de subconjunto trivial, já que é subconjunto de qualquer conjunto, e ao último subconjunto mencionado chamamos subconjunto impróprio, designando-se os restantes por subconjuntos próprios.

Qualquer conjunto com um ou mais elementos serve para o "processo passo a passo" de Cantor. Por exemplo, um conjunto com dois elementos arbitrários $\{a, b\}$ define, através dos seus subconjuntos, um outro conjunto, de quatro elementos $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, o qual define, de forma análoga, um outro de dezasseis elementos $\{\phi, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\phi\}, \{\phi, \{a\}\}, \{\phi, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \phi\}, \{\{a\}, \phi\}, \{\{b\}, \phi\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\phi, \{a,b\}\}, \{\phi, \{a,b\}\}, \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$, e assim por diante.

Com uma regra muito simples podemos dizer de imediato quantos subconjuntos contém um conjunto de n elementos, regra que aliás já era conhecida no tempo de Cantor: os subconjuntos são tantos como 2 multiplicado por si próprio n vezes.

Se Cantor tivesse parado aqui, ter-nos-ia dado uma prescrição racional e bem organizada para gerar um conjunto infinito, mas sem que necessariamente ele fosse atingido. O seu trabalho teria ganho a estima dos que afirmavam, e afirmam ainda hoje, que "infinito é mais um verbo do que um substantivo", que o infinito resulta de um processo ilimitado e não é algo que possa ser nomeado. Logo após a invenção do "processo passo a passo", que acabámos de ver, Cantor procedeu no sentido de postular a existência de um conjunto verdadeiramente infinito.

A propósito de atribuir aos números os principais papéis da sua teoria, Cantor estabeleceu como exemplo definitivo dum conjunto infinito, o conjunto dos números naturais 0,1,2,3,4, ... Por outras palavras, na sua teoria, os números inteiros deveriam ser tratados, não como uma interminável sequência, um verbo, mas como um verdadeiro conjunto infinito, um substantivo. Era como se, na sua visão de infinito, Cantor se tivesse inspirado na imagem evocada por uma linha de um poema de William Blake, "guardar o infinito na palma da tua mão".

No decurso do seu devaneio poético sobre este assunto, não se limitou a referir a existência dum conjunto realmente infinito, descrevendo-o paradoxalmente como o único conjunto concebível que pode ser equivalente a alguma sua própria. Para o ilustrar, Cantor voltou uma vez mais aos números naturais, considerando os números pares dentro do conjunto dos números naturais. Podemos conjecturar que o conjunto dos pares, se bem que infinito, será metade do conjunto completo dos números naturais, o que está de acordo com a lógica do nosso senso comum, em que o todo é equivalente à soma das suas partes. Contudo, de acordo com a definição cantoriana de equivalência (ou equicardinalidade),

Teorema :

O conjunto infinito dos números pares tem exactamente o mesmo número de elementos que o conjunto infinito total dos números naturais⁴.

Demonstração :

Basta considerar a aplicação bijectiva, do conjunto dos números naturais no conjunto dos números pares, definida por $\varphi(n) = 2n$ que formaliza a correspondência seguinte

pares :	0	2	4	6	8	10	...	2k	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
naturais :	0	1	2	3	4	5	...	k	...

Fica assim assente que o conjunto dos pares é *tão grande* como o de todos os naturais, ie, o conjunto dos naturais não é maior que a sua parte.

Mas, na verdade, Cantor não provou essa equivalência emparelhando, um a um, cada número par com cada número natural. A prova foi indirecta, declarando ser inconcebível que um tal emparelhamento pudesse deixar de fora números de qualquer um dos conjuntos, visto que são inesgotáveis.

Segundo esta preciosa definição cantoriana de equivalência relativa ao "tamanho" dos conjuntos, pode-se também facilmente mostrar que o conjunto dos ímpares, assim como o conjunto dos números primos e dos quadrados perfeitos

⁴ Um conjunto infinito que seja equipotente ao conjunto dos números naturais diz-se *numerável*, na medida em que podemos contar os seus elementos utilizando os naturais.

tem o mesmo "tamanho" que o conjunto dos naturais, \mathbb{N} , o que acaba por explicar o paradoxo de Galileu mencionado anteriormente.

Teorema : O conjunto dos números primos é numerável.

Demonstração :

Basta exibir a seguinte correspondência (ou emparelhamento)

primos :	2	3	5	7	11	13	...	P_k	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
naturais :	1	2	3	4	5	6	...	k	...

Porém, não existe uma fórmula para o emparelhamento, o k -ésimo primo⁵ é emparelhado com o natural k .

Assim, é de esperar que *todo o subconjunto dos números naturais seja numerável*, isto é, que tenha o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais. Recomeça então Cantor onde Galileu se deteve, chegando à notável conclusão de que, quando estamos a considerar quantidades infinitas, *o todo nem sempre é maior do que cada uma das suas partes*.

Em 1888, Richard Dedekind, contemporâneo de Cantor que como ele muito contribuiu para os fundamentos da matemática nas últimas três décadas do século XIX, propôs a seguinte definição de conjunto infinito.

Definição

Um conjunto A é infinito se, e só se A tem o mesmo número de elementos que alguma sua parte própria.

Vamos aplicar este critério para mostrar que

Teorema : O conjunto dos naturais, \mathbb{N} , é infinito

Demonstração :

Basta considerar a função sucessor $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida por $\gamma(n) = n + 1$ que é bijectiva. Logo $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e, portanto, \mathbb{N} é infinito pois $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ é uma parte própria de \mathbb{N} .

A bijecção γ presta-se a uma situação anedótica conhecida por Hotel de Hilbert, a qual será descrita num dos capítulos seguintes.

⁵ Note-se que, actualmente, conhecemos o conjunto dos números primos como um conjunto infinito, cuja demonstração foi realizada recorrendo ao método do absurdo.

Cantor questionou-se então sobre um conjunto "maior" que o conjunto dos naturais e o que veio a encontrar foi o seguinte resultado :

Teorema : O conjunto infinito dos números inteiros, Z , é numerável.

Demonstração :

$$\text{A função } f: N \rightarrow Z \text{ definida por } f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é bijectiva e pode ser ilustrada com o seguinte emparelhamento:

<i>inteiros:</i>	0	-1	+1	-2	+2	...
	↓	↓	↓	↓	↓	
<i>naturais:</i>	0	1	2	3	4	...

Note-se que para "exibir" esta bijecção foi necessário ignorar a ordem usual em Z .

Teorema : O conjunto dos números inteiros e o conjunto das fracções racionais são equipotentes.

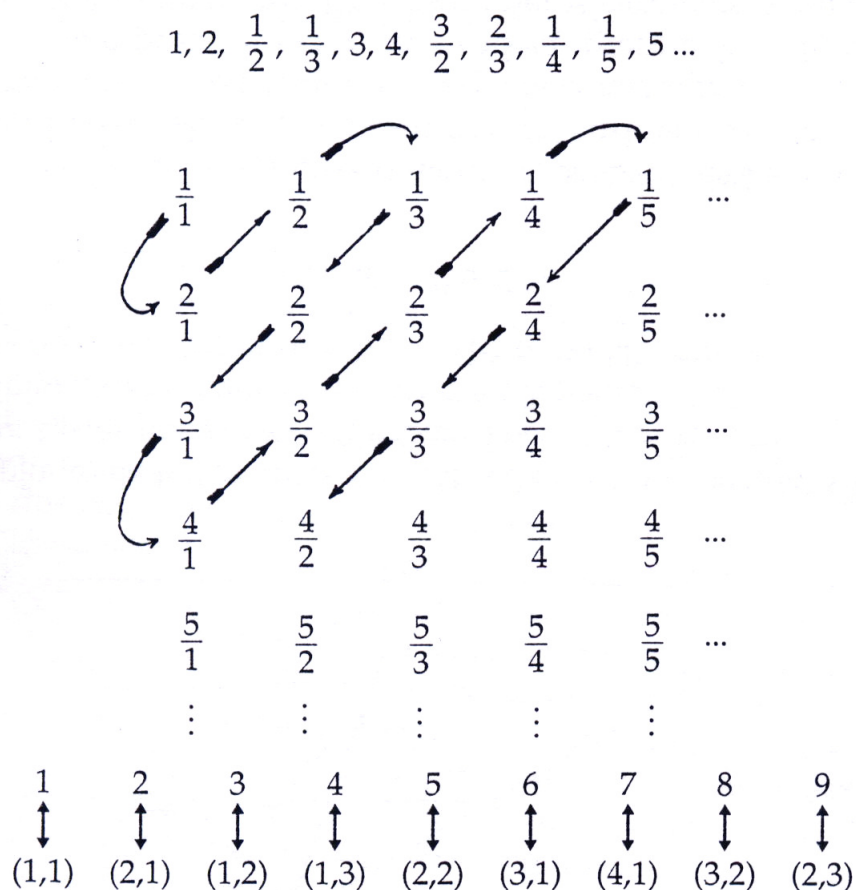
Esta descoberta de Cantor foi uma grande surpresa no mundo da matemática, pois até então ninguém acreditava que fosse possível "enumerar sem repetições" todos os números racionais, principalmente por causa da propriedade densidade da ordem usual em Q . De facto, as fracções e os inteiros podem ser postos em correspondência um-a-um, apesar de estes estarem espaçados por grandes buracos e os racionais densamente distribuídos.

Demonstração :

Todo o racional pode ser escrito na forma de fracção $\frac{m}{n}$, sendo o numerador e o denominador números inteiros. Identifiquemos esta fracção com o par (m,n) ⁶. Todos estes pares podem ser colocados num quadro, como o quadro da figura , ocupando (m,n) a posição no cruzamento da linha m com a coluna n . Neste arranjo, comecemos em 1, sigamos verticalmente para a esquerda até 2, depois diagonalmente para cima e para a direita até $\frac{1}{2}$ e de seguida horizontalmente até

⁶ Uma "artimanha" semelhante, mas agora sem necessidade de passar por cima de elementos repetidos, mostra que $N \sim N \times N$, isto é, que $N \times N$ é numerável.

$\frac{1}{3}$, depois para baixo até à terceira linha em 3. Sigamos então as flechas na figura, eliminemos as fracções redutíveis pelo caminho, de modo que cada racional apareça uma só vez na sequência



Havendo, surpreendentemente, tantos racionais como naturais ocorre perguntar : serão os infinitos todos iguais ou, pelo contrário, haverá infinitos maiores do que outros ? Serão os reais *tão grandes* como os naturais ? A resposta é não. Os reais não são numeráveis, ou seja, o conjunto dos reais é demasiado grande para contar os seus elementos com os naturais. Cantor estabeleceu uma hierarquia dos conjuntos infinitos, como veremos no ponto seguinte.

*

A hipótese do contínuo

Se não esperais o inesperado, não o encontrareis, visto que é penoso descobri-lo e, além disso, difícil.

Heráclito

"Qualquer conjunto infinito cujos membros sejam qualquer subconjunto de números inteiros, têm exactamente a mesma cardinalidade que o conjunto de todos os números inteiros". Por exemplo, há tantos quadrados quantos os números inteiros negativos, há tantos cubos quantos os números divisíveis por 100, há tantos ímpares quantos os múltiplos de 2000, ... existindo tantos elementos nestes subconjuntos considerados como em todo o conjunto dos números naturais.

De facto, Cantor descobriu algo que parece agora bastante óbvio: não existe nenhum conjunto infinito que seja "mais pequeno", isto é que tenha menor cardinalidade, do que o conjunto dos números inteiros.

Para ele, se não para muitos dos seus contemporâneos, o paradoxo de que o todo pudesse ser igual a uma das suas partes era uma peculiaridade iniludível e racional do reino do infinito. Pelo menos foi um paradoxo que não deteve a sua imaginação, impedindo-a de prosseguir em frente, para lá dos conjuntos infinitos.

Tal como usara conjuntos finitos para definir os passos na caminhada para o infinito, Cantor usou agora os conjuntos infinitos para definir os passos na caminhada além-infinito. O processo manteve-se o mesmo: a existência dum conjunto infinito implica a existência de outro conjunto maior que, por sua vez implica a existência de um outro ainda maior, e assim sucessivamente *ad infinitum*. Em cada passo, o conjunto maior compreende todos os subconjuntos concebíveis do conjunto imediatamente anterior. Inclusivamente, podemos ainda usar a mesma fórmula que vimos atrás e que nos dá saltos numéricos entre os diversos degraus infinitos; a única novidade é a importante simbologia introduzida por Cantor.

*

Como já foi mencionado, um conjunto B e um conjunto A têm a mesma cardinalidade se forem equivalentes (ou equipotentes). O número cardinal de A (ou potência no sentido de Cantor) - denotado por $\#A$ - designa a propriedade intrínseca que o conjunto A tem em comum com todos os que lhe são equivalentes. Cantor definiu o *número cardinal* de um conjunto como sendo "a propriedade que fica após abstrairmos a natureza qualitativa dos seus elementos e a sua ordenação".

Para representar o número de elementos de um conjunto infinito numerável, Cantor adoptou o símbolo \aleph_0 que se pronuncia «álefe zero», formado pela primeira

letra do alfabeto hebraico, álefe \aleph , e pelo índice zero. Para distinguir este novo número dos números finitos, ele designou-o como transfinito. No entanto, \aleph_0 é tanto um número como 1 ou como 36, ou qualquer outro número, mas $\#\mathbf{N} = \aleph_0$.

Sendo o conjunto \mathbf{N} - conjunto dos naturais - o infinito mais pequeno, o seu cardinal - *álefe zero* - satisfaz propriedades muito curiosas tais como :

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad , \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad , \quad \aleph_0^2 = \aleph_0$$

exibindo os cardinais uma aritmética consistente.

*

De seguida, Cantor questionou-se se existiriam outros números transfinitos, isto é, será que existem conjuntos infinitos cuja cardinalidade seja maior do que a do conjunto dos números inteiros?

Aparentemente, parecem existir mais números racionais, visto que incluem as fracções, do que números naturais. No entanto, vimos que Cantor emparelhou os elementos dos dois conjuntos e descobriu que tinham a mesma cardinalidade. Há tantas fracções e números naturais juntos quantos os números naturais apenas!

Antes de considerarmos os números reais, que inclui o conjunto dos irracionais, é bom recordar alguma da teoria que Cantor já tinha à sua disposição na altura.

Em 1844, J. Liouville provou que existem duas categorias de números irracionais : os algébricos e os transcendentos.



Um número algébrico é aquele que pode ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.

Por exemplo, a equação algébrica $x^2 - 2 = 0$ tem duas soluções : $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$. Porém, são ambos números algébricos. A primeira raiz, x_1 , pode ser caracterizada pelos coeficientes da equação, (1,0,-2), mais o número da raiz = 1.

$$x_1 \leftrightarrow \{1,0,-2,1\}$$

A segunda raiz, x_2 , pode também ser caracterizada de forma análoga

$$x_2 \leftrightarrow \{1,0,-2,1\}$$

Uma vez que existem infinitas equações algébricas, existe também um número infinito de suas raízes, racionais e irracionais. No entanto, há números que nunca podem ser raízes de uma equação algébrica; por exemplo, é impossível formular uma equação que tenha π como raiz, porque

este número só surge através do uso de processos infinitos de análise, nunca através de processos algébricos finitos. As equações não algébricas como por exemplo exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas não têm, por regra, raízes que sejam números algébricos. Os números não algébricos denominam-se transcendentos.

No tempo de Cantor, a classe dos transcendentos era um verdadeiro enigma. Conheciam-se dois importantes números transcendentos : e , a base dos logaritmos naturais ; e π , a razão do perímetro da circunferência com o diâmetro.

A prova dos dois teoremas apresentados de seguida - o segundo trata-se de uma generalização do primeiro - é em tudo semelhante ao método utilizado no capítulo anterior para demonstrar que o conjunto dos irracionais é numerável.

Teorema :

Se A é um conjunto infinito arbitrário cujos elementos podem ser determinados de forma única por um par ordenado de inteiros $\{a,b\}$, então $\#A = \aleph_0$

Teorema :

Se A é um conjunto infinito arbitrário cujos elementos podem ser determinados de forma única por um n -uplo ordenado de inteiros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, então $\#A = \aleph_0$.

Teorema : A cardinalidade dos números algébricos é \aleph_0 .

Demonstração :

Todo o número algébrico é solução de alguma equação algébrica com um número finito de coeficientes. Logo, cada número algébrico pode ser caracterizado de forma única por n -uplo ordenado finito como vimos no exemplo acima.

Assim, pelo teorema exposto acima, a cardinalidade dos números algébricos é \aleph_0 , isto é, o conjunto dos números algébricos é numerável.

Para comparar a cardinalidade do conjunto dos números naturais com a dos números reais, Cantor fez a distinção entre os números algébricos e o mais abrangente conjunto dos reais, que comporta também os transcendentos. Primeiro tentou emparelhar os inteiros com os algébricos. Através de um engenhoso método de ordenação das equações algébricas com base nos expoentes dos seus coeficientes, Cantor conseguiu mostrar que as suas raízes, isto é, os números algébricos, podiam ser emparelhados

com os números naturais. Portanto, o conjunto dos números algébricos tem a mesma cardinalidade do dos naturais.

Até aqui a procura de um infinito de dimensão superior ao dos naturais parecia não conduzir a lado nenhum. Todos os conjuntos pareciam ter a mesma cardinalidade, mas Cantor surpreendeu toda a gente - e a si próprio - quando tentou emparelhar o conjunto dos números reais com o dos naturais e descobriu que era maior, aliás, muito maior! A cardinalidade superior do conjunto dos reais deve-se aos números transcendentais que contém. Quando foram descobertos, pensava-se que estes números eram raros, mas Cantor provou exactamente o contrário: não só eles são comuns, como existem em muito maior quantidade do que qualquer outra espécie de números.

Ora é possível provar que não existem cardinais infinitos abaixo de alefe zero. Cantor demonstrou que, para além dos numeráveis, existiam outros transfinitos. Existiam classes que não eram numeráveis, isto é, que não podiam ser postas em correspondência um-a-um com os inteiros e que, portanto, possuíam uma cardinalidade maior do que alefe zero. A classe dos números reais é uma delas. A demonstração consiste em supor, com vista a um absurdo, que os reais são numeráveis e chegar a uma contradição.

Cantor admitiu que existia uma correspondência perfeita entre todos os naturais e todos os números reais de 0 a 1. (Se existir uma correspondência entre todos os inteiros e todos os reais de 0 a 1, existirá também uma correspondência entre todos os naturais e todos os reais positivos). Para fazer esta correspondência, é preciso listar todos os números reais. Cantor assumiu que esta listagem podia ser feita, escrevendo todos esses números sob a forma de dízimas infinitas sem período 0. Quer dizer, por exemplo, que números que possam ser representados por uma dízima finita, como 0,4, serão representados pela dízima infinita de período 9, como 0,3999... respectivamente.



O número 1 é representado pela dízima infinita 0,999...



Um argumento intuitivo para mostrar que $0,999... = 1$ é o seguinte:
Ponhamos $x = 0,999...$ de modo que $10x = 9,999...$ de onde vem que

$$10x - x = 9,999... - 0,999... = 9$$

Então $9x = 9$ e portanto $x = \frac{9}{9} = 1$.

Comecemos então por escrever os reais na forma decimal e enumeremo-los num quadro onde todos figurem :

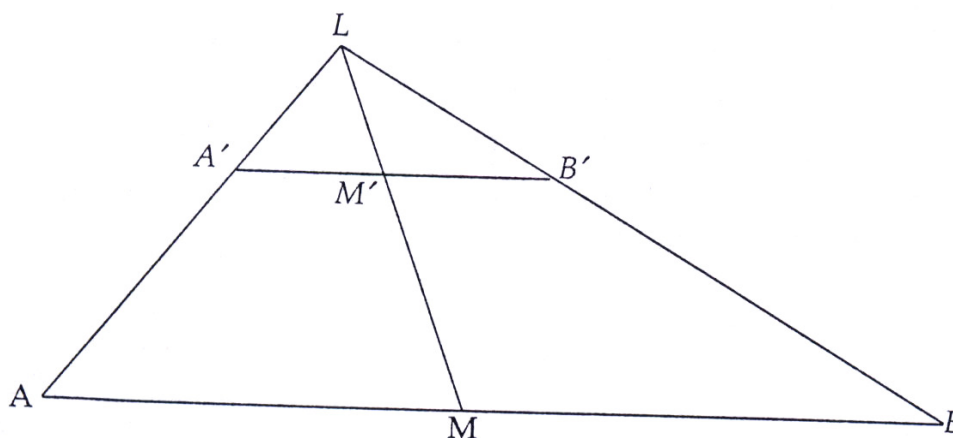
1	↔	0.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
2	↔	0.	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...
3	↔	0.	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	...
4	↔	0.	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	...
5	↔	0.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	...

Construamos um novo número cuja primeira casa decimal seja diferente da primeira casa decimal do primeiro desse quadro, a segunda diferente da segunda casa decimal do segundo, ... , a n -ésima diferente da n -ésima casa do n -ésimo da listagem. Como se comprova sem dificuldade, o número assim construído não pode estar em lugar algum da listagem (é diferente do primeiro da lista porque difere dele na primeira casa decimal, difere do segundo porque diferem na segunda casa decimal, etc), o que é absurdo, em virtude de se ter suposto que esta era completa contemplando todos os reais de zero a um.

Assim sendo, a suposição de que todos os números reais podiam ser listados e portanto emparelhados com os inteiros está errada, porque conduz a uma contradição. É este o famoso *argumento diagonal* de Cantor.

Desta forma Cantor provou que o conjunto dos números reais é "maior" do que o conjunto dos números inteiros. Mais, este processo de diagonalização pode ser usado para provar que é sempre possível encontrar conjuntos menores e maiores - que não existe o conjunto infinito maior de todos. Assim, os números transfinitos (ou ordens de infinito), tal como os números finitos usuais, são infinitos. Cantor refere-se a este segundo número transfinito como *cardinalidade do contínuo*, visto representar a cardinalidade dos números reais, representando-o pela letra celta C . Ainda não se conseguiu provar se C é mesmo o número transfinito a seguir a \aleph_0 , ou se existem outros números transfinitos entre eles. Sabe-se, no entanto, que existem números transfinitos maiores do que C .

Qualquer segmento de recta tem cardinalidade C , o mesmo acontecendo com qualquer recta do plano, qualquer cubo do espaço. Na figura seguinte ilustra-se a correspondência biunívoca de pontos de segmentos de diferentes comprimentos.



O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A chama-se conjunto das partes (ou potência) de A e pode-se denotar por 2^A . Cantor provou que, quer A seja finito, quer infinito, 2^A nunca é equivalente a A ou a qualquer dos seus subconjuntos. Passemos à formalização do seguinte resultado, conhecido como o *teorema de Cantor* :

Teorema

se A é um conjunto finito, então $\#A < \#\wp(A)$, onde $\wp(A)$ designa a potência de A .



Seja A um conjunto finito arbitrário.

Se $A = \emptyset$ então $\#A = 0$ e $\#\wp(A) = \#\{\emptyset\} = 1$ de onde $\#A < \#\wp(A)$

Suponhamos que $A \neq \emptyset$. Uma vez que a aplicação $x \rightarrow \{x\}$ de A para $\wp(A)$ é evidentemente injectiva então, pelo teorema dos cacifos,

$$\#A \leq \#\wp(A)$$

Suponhamos com vista a um absurdo que $\#A = \#\wp(A)$, ie, que existe uma bijecção φ entre A e $\wp(A)$. Nesta bijecção, cada elemento $a \in A$ fica associado a uma parte Ψ_a do conjunto A da seguinte forma

$$a \rightarrow \Psi_a = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{a\} \text{ ie } x = a \\ 0 & \text{se } x \notin \{a\} \text{ ie } x \neq a \end{cases}$$

Seja $B = \{ b \in A : b \notin \Psi_a \}$.

Como A é equipotente a $\wp(A)$ e $\emptyset \in \wp(A)$, então $\exists c \in A$ tal que $\Psi_c = \emptyset$ de onde $a \notin \Psi_c$ e portanto $B \neq \emptyset$.

Por outro lado, por φ ser sobrejectiva, corresponderá a $B \in \wp(A)$ um certo $b \in A$, ie, $B = \Psi_b$ para algum $b \in A$. Ora de duas situações ocorrerá uma : $b \in B$ ou $b \notin B$.

Se $b \in B$ então $b \notin \Psi_b = B$, o que é contraditório.

Se $b \notin B$ então $b \in \Psi_b = B$, o que de novo é contraditório.

Assim, não poderá existir nenhuma bijecção entre A e $\wp(A)$ de onde se poderá concluir que $\#A \neq \#\wp(A)$ e portanto $\#A < \#\wp(A)$.

∴

Da mesma maneira como obtemos a partir do conjunto A esse conjunto potência de A , podemos em seguida obter $2^{(2^A)}$ de 2^A e assim sucessivamente, tantas vezes quantas quisermos. Em particular, não há dois conjuntos equivalentes em

$$A, 2^A, 2^{A^A}, 2^{A^{A^A}} \dots$$

Portanto, o processo de formar o conjunto de todos os subconjuntos gera uma cadeia infinita de conjuntos finitos crescentes, "não equivalentes". Em particular, se A for o conjunto dos números naturais, então 2^A , o conjunto de todos os conjuntos de números naturais, é equivalente ao contínuo (o conjunto de todos os pontos sobre um segmento de recta). Resumidamente, se A é um conjunto infinito arbitrário cujos elementos podem ser determinados de forma única por um par ordenado de inteiros $\{a,b\}$, então $\#A = \aleph_0 = c$. Podem obter-se novos números cardinais tomando a união destes conjuntos e construindo a sequência análoga para esta união. Deste modo, é possível gerar uma cadeia interminável de conjuntos infinitos cada vez maiores. Para os números cardinais pode definir-se uma aritmética com operações de soma, produto, potenciação ...

Se de um lado o conceito de infinito continua carregado das mesmas dificuldades de muitos séculos, do outro ele enriqueceu-se muito. Os matemáticos hoje classificam vários tipos diferentes de infinito em dois níveis :

Nível zero (numerável)

- infinito numerável
- infinito dos números inteiros
- infinito dos números racionais
- infinito dos números irracionais algébricos

Nível um (contínuo)

- infinito contínuo
- infinito dos números reais
- infinito dos números irracionais transcendentos

*

Cantor provou que o cardinal dos reais é maior que o cardinal dos inteiros. Mas o que existe entre eles ? Existirá uma potência intermédia entre a do conjunto numerável e a do contínuo ? Isto é, existe sobre um segmento de recta um conjunto infinito de pontos que não é equivalente a todo o segmento, e que também não é equivalente ao conjunto dos números naturais? O problema, conhecido por *hipótese do contínuo*, afirma hipoteticamente que o cardinal do conjunto dos números reais é o menor cardinal infinito maior do que o dos naturais. Este problema figurava em primeiro lugar na lista de problemas matemáticos não resolvidos proposta por David Hilbert em 1900 (ver anexo B). Foi resolvida complementemente em 1963 por Paul Cohen, no entanto, num sentido totalmente diferente do que Hilbert tinha em mente.

Uma discussão rigorosa da hipótese do contínuo requer a especificação de um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos. É esta a temática abordada no capítulo seguinte.

*

Axioma da escolha

Para alcançar a verdade é necessário ; uma vez na vida, pôr tudo em dúvida - até onde seja possível.

Descartes

O uso livre da noção de conjunto tal como Cantor o definiu - *o conjunto como qualquer colecção de objectos bem definidos e distintos, da nossa intuição e pensamento* - conduz a contradições. Para ser base segura da matemática tem de utilizar uma teoria mais sofisticada.

Zermelo, em 1908, fundou a teoria axiomática dos conjuntos. Nesta teoria, os conjuntos são entes indefinidos que obedecem a um certo número de axiomas para a teoria dos conjuntos.

Conhecem-se mais de cem equivalentes ao axioma da escolha, entre eles :

Todo o conjunto pode ser bem ordenado.

Todo o espaço vectorial tem pelo menos uma base.

Muitos matemáticos consideravam que o uso do axioma da escolha devia ser evitado, não por não ser intuitivamente plausível, mas pela grande latitude de α : "qualquer colecção de conjuntos". A teoria dos conjuntos baseada na axiomática de Zermelo-Frankel, mas na qual o axioma da escolha não é assumido, é designada por *teoria dos conjuntos restrita*. Esta teoria seria aquela que a maioria dos matemáticos aceitariam. A teoria dos conjuntos baseada nos axiomas da teoria dos conjuntos restrita, ao incluir o axioma da escolha é designada por *teoria standardizada dos conjuntos*.

Gödel, em 1938, provou que, se a teoria dos conjuntos restrita for consistente, então também o será a teoria dos conjuntos standardizada. Ou seja, o axioma da escolha não deve merecer-nos maiores reservas do que os outros, ao contrário do que certos matemáticos proeminentes julgavam. Gödel provou ainda que podemos incluir na teoria dos conjuntos a hipótese do contínuo como axioma adicional : se a teoria dos conjuntos restrita e a hipótese do contínuo implicarem uma contradição, então ela já existirá na teoria dos conjuntos restrita. O axioma é independente dos outros e com eles compatível.



Em 1964, Paul Cohen provou que a veracidade da hipótese do contínuo depende da escolha feita para os axiomas da teoria dos conjuntos. A situação é análoga à da geometria. A verdade ou falsidade do postulado das paralelas depende da geometria, já que é válido na geometria euclidiana mas há geometrias onde não o é.

A teoria dos conjuntos não cantoriana parte dos axiomas da teoria dos conjuntos restrita, incluindo uma ou outra forma da negação do axioma da escolha. Em particular, podemos admitir como axioma a negação da hipótese do contínuo. Cohen provou que tal negação é consistente com a teoria dos conjuntos restrita, da mesma forma que Kurt Gödel provou que a afirmação da hipótese do contínuo o era. Se a teoria dos conjuntos restrita for consistente, continuará a sê-lo se lhe juntarmos a afirmação «a hipótese do contínuo é falsa» ou «o axioma da escolha é falso». A veracidade da hipótese do contínuo não foi ainda *decidida* e o mesmo acontece com a questão da existência de um conjunto de cardinalidade intermédia entre a de um conjunto e a do conjunto das suas partes (isto é, dos seus subconjuntos).

Poder-se-ia pensar, por exemplo, que as teorias de Cantor, que trouxeram soluções para tantos problemas de longa data, teriam sido imediatamente acolhidas entre os grandes triunfos matemáticos do século, se não mesmo de todos os tempos, mas infelizmente não foi assim que aconteceu. Foram desprezadas, ridicularizadas, consideradas até um pouco loucas, e Cantor, esgotado pela terrível contestação, enlouqueceu também.

Em 1908, Zermelo, na sua obra sobre fundamentação da teoria dos conjuntos intitulada *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, propôs um sistema de sete axiomas para a teoria dos conjuntos. Um deles assegura a existência do infinito, como se segue :

O domínio dos objectos considerados conjuntos (satisfazendo os axiomas de Zermelo) contém o conjunto Z , que integra o conjunto vazio, e também o conjunto $\{a\}$ (sucessor de a) sempre que contenha o elemento a .

O chamado *axioma do infinito de Dedekind*, que afirma a existência de um conjunto que pode ser aplicado um-a-um num dos seus subconjuntos próprios, é equivalente ao enunciado do axioma, mas tal equivalência não pode ser provada na teoria dos conjuntos usual sem recurso ao axioma da escolha.

Na teoria dos conjuntos são utilizados os chamados *axiomas do infinito superior*, que postulam a existência de conjuntos de cardinalidade superior, como o axioma da existência de um cardinal inacessível, o axioma da existência de um cardinal mensurável, etc.

Von Neumann propôs um método de organizar a teoria dos conjuntos introduzindo a ideia de que nem todas as entidades podem ser admitidas como elementos de conjuntos em vez de restringir a existência dos conjuntos como fez Zermelo. Distribuiu as entidades em duas classes: elementos e não-elementos. Somente as entidades da primeira classe podem pertencer a conjuntos. A seguir Von Neumann classificou os axiomas que caracterizariam a condição de elemento de certas entidades bem comportadas (Os axiomas de Von Neumann caracterizam como elementos aproximadamente os mesmos conjuntos bem comportados cuja existência fica assegurada pelos axiomas de Zermelo).

O Hotel de Hilbert

Devemos ser capazes de dizer em qualquer altura - em vez de pontos, linhas rectas e planos - mesas, cadeiras e canecas de cerveja.

David Hilbert

O Hotel Infinito, situado em Infinitópolis, tem um número infinito de quartos, um por cada número natural, estando numerados de 1 até ao infinito. Um dia, estando os quartos todos ocupados, chegou um viajante que pretendia pernoitar nesse hotel.

A empregada não quis hospedá-lo desculpando-se que estavam esgotados. O viajante pediu então para falar com o gerente do hotel, para tentar arranjar uma solução, visto que não existia mais nenhum hotel em Infinitópolis. O gerente, atrapalhado, respondeu que na verdade não havia vagas, mas que lhe ia arranjar um quarto. Mandou mudar todos os hóspedes de cada quarto para o quarto com o número seguinte, deixando assim o quarto 1 vago para o viajante.

No dia seguinte apareceram 5 casais em lua-de-mel, pedindo quartos. A empregada mandou então mudar os hóspedes de cada quarto para o quarto com um número superior em 5 unidades, deixando os primeiro 5 quartos vagos para os 5 casais recém-chegados.

No dia seguinte chegou uma excursão com um número infinito de turistas, tantos quantos os números inteiros, pedindo alojamento. A empregada ficou atrapalhada, e correu a chamar o gerente :

Empregada : Sr. Gerente, já percebi como é que no Hotel Infinito se resolve o problema sempre que há um número finito de novos hóspedes; mas será possível arranjar espaço para um número infinito deles, isto é, tantos quantos os quartos que temos já ocupados?

Gerente: Claro! Mudamos os hóspedes de cada quarto para outro com um número duas vezes superior!

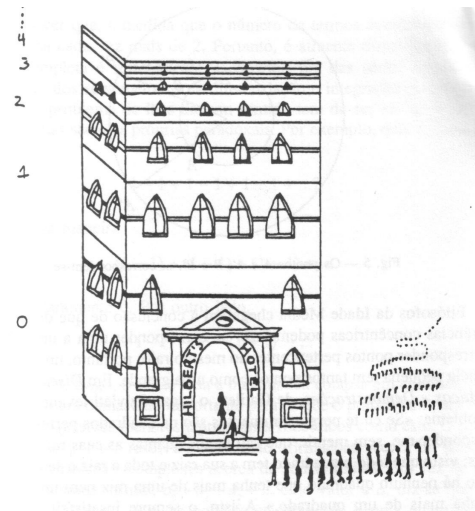
Empregada: Claro! Desse modo mudamos os hóspedes todos para os quartos com número par, o que deixa vagos todos os quartos com número impar, que são em número infinito, tantos quantos os turistas!

Nenhum conjunto finito pode ser posto em correspondência biunívoca com um dos seus subconjuntos, no entanto o mesmo não se passa quando estamos a tratar de conjuntos infinitos. De facto, podemos definir matematicamente os conjuntos

infinitos como sendo precisamente aqueles que podem ser colocados em correspondência biunívoca com alguns dos seus subconjuntos.

Neste caso, o gerente do hotel começou por provar que o conjunto de todos os inteiros pode ser posto em correspondência biunívoca com um dos seus conjuntos de modo a deixar de fora 1 e depois 5 elementos. Como é óbvio, este processo pode ser modificado de maneira que sobre o número finito de elementos que desejamos.

A manobra final do gerente disponibilizou um número infinito de quartos, mostrando como o resultado de subtrair infinitos de infinitos continua a ser infinito. Colocando os números naturais em correspondência biunívoca com os números pares, continua a manter-se um conjunto infinito de números naturais, a saber, o conjunto dos números ímpares.



Já foi referido que Cantor designou a cardinalidade dos naturais por \aleph_0 , que coincide com a cardinalidade dos números pares e dos números ímpares.

Assim sendo, vamos ter que, como o conjunto dos naturais é a reunião do conjunto dos pares com o dos ímpares, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

O que está subjacente ao raciocínio do gerente do Hotel Infinito é que: $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$, que é apenas uma das muitas estranhas propriedades que têm estes números...

Algumas das propriedades que regem estes números são, como já vimos

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 ; \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 ; \aleph_0^2 = \aleph_0$$

Apesar destas propriedades nos parecerem pouco naturais, conduzem a uma versão consistente da aritmética para números infinitos.

Veja-se abaixo algumas das regras que regem os números infinitamente grandes (ig's) e os infinitamente pequenos (ip's):

$$ip + ip = ip ; ip \times ip = ip ; ig + ig = ig ;$$

$$ig \times ig = ig ; ip + ig = ig ; 1 / ig = ip;$$

$$1 / ip = ig \text{ (se } ip \neq 0 \text{)} ; \text{ etc.}$$

Podemos encarar o problema do hotel de Hilbert adoptando um ponto de vista ordinal. Os números ordinais denotam a relação de um elemento de um conjunto relativamente aos outros com referência a um sistema de ordenação. Suponhamos que o gerente atribui a cada um dos hóspedes um *número de ordem* e que já esgotou todos os números naturais. Quando chega um novo hóspede, o gerente cria um novo número - ω - que vem após todos os naturais. Este é o primeiro número transfinito.

Esta indexação pode continuar. Sabendo-se que há tantos naturais como naturais pares (ou naturais ímpares), associemos a ordem p ao natural par $2p$. Quando tivermos esgotado todos os inteiros para indexarmos os pares, que ordem devemos atribuir ao natural 1 ? O transfinito ω . E que ordem devemos atribuir aos naturais ímpares ? Ordenemos os ímpares, associando ao ímpar $2p + 1$ o transfinito $\omega + p$. Depois podemos dar ao número $\omega + \omega$ a ordem 2ω . Cantor prosseguiu, passo a passo, e assim definiu um infinito numerável de números transfinitos.

$\omega, \omega + 1, \omega + 2 \dots$	$\omega + p, \dots$
$2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2 \dots$	$2\omega + p, \dots$
$n\omega, n\omega + 1, n\omega + 2 \dots$	$n\omega + p, \dots$
$\omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2 \dots$	$\omega^2 + p, \dots$
$\omega^n, \omega^n + 1, \omega^n + 2 \dots$	$\omega^n + p, \dots$
$\omega^\omega, \omega^\omega + 1, \omega^\omega + 2 \dots$	$\omega^\omega + p, \dots$

A seguir à classe de transfinitos agora definida existe um novo número transfinito, do mesmo modo que existe um transfinito depois de todos os inteiros. Usando um procedimento análogo ao anterior, gera-se uma extensão transfinita. Fortalecidos com a indexação transfinita, podemos, do mesmo modo que Cantor, perguntar-nos se dado um conjunto arbitrário, serão os números transfinitos suficientes para indexarem todos os seus elementos ?

Os paradoxos consequentes da teoria de Cantor

O caminho dos paradoxos é o caminho da verdade.

Oscar Wilde

Com Cantor parecia ter-se chegado ao fim da estrada no que diz respeito aos problemas dos números na Matemática. O infinito, a base de toda a análise e dos números irracionais, tinha sido finalmente sistematizado e fundamentado numa teoria consistente. Mas um novo caminho despontou - existe sempre, felizmente, um novo caminho em Matemática.

Um dos primeiros obstáculos que se levantaram diz respeito à teoria dos conjuntos de Cantor e à sua afirmação de que existe um número infinito de números transfinitos, isto é, não existe um número transfinito maior do que todos os outros. Se isto é verdade conduz-nos a um paradoxo:

Se a todos os conjuntos infinitos se pode atribuir um número transfinito, a sua cardinalidade, então tem de existir um conjunto cujos membros incluam todos os números transfinitos. Então este conjunto teria de ter como cardinalidade o último (o maior) dos números transfinitos - no entanto Cantor afirmou que não existe tal número! Mas há mais: será que este conjunto, uma vez que inclui todos os conjuntos infinitos, se inclui a si próprio?

Em 1905, Bertrand Russell, matemático e filósofo inglês Prémio Nobel de literatura em 1950, publicou um paradoxo cuja formalização é a seguinte:

Seja Z o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos deles mesmos
$$Z = \{ X : X \notin X \}$$

Será que o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios é membro de si próprio?

Se $Z \in Z$, então, por definição de Z , sendo Z um elemento de si mesmo, este não pertence a Z .

Se $Z \notin Z$ então, por definição de Z , não sendo Z um elemento de si mesmo, este pertence a Z .

Fica então demonstrado que não existem conjuntos que sejam elementos de si próprios donde se conclui a inexistência do conjunto de todos os conjuntos.

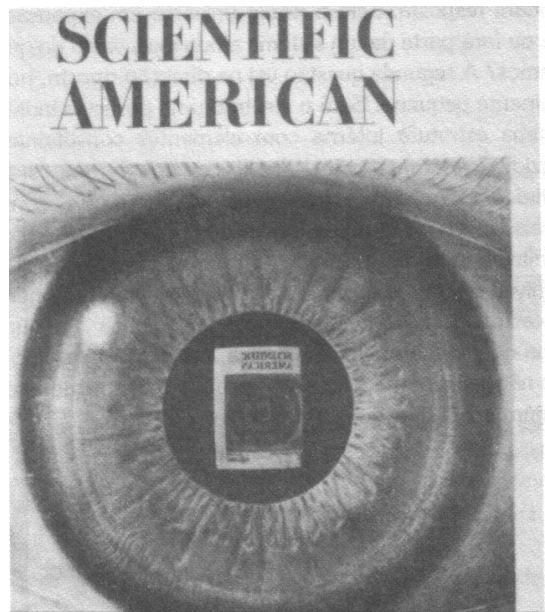
∴

Analisamos mais a fundo, no seguinte capítulo, este importante paradoxo que abalou os fundamentos da teoria de conjuntos.

*

A velha questão: "Quem nasceu primeiro: o ovo ou a galinha?" é o exemplo mais familiar daquilo a que os matemáticos chamam regressão infinita. Se o ovo nasceu da galinha que nasceu de um ovo, etc., vemos embrenhados num raciocínio que recua no tempo sem que a cada passo se esteja mais perto do fim do que antes: é infinito.

Outro exemplo é o que podemos observar na figura seguinte; é uma reprodução da capa da revista *Scientific American* de Abril de 1965, a qual aparece reflectida num olho humano. A imagem reflectida, por sua vez, representa um olho mais pequeno reflectindo uma capa mais pequena, e assim sucessivamente.



Podemos encontrar também exemplos na literatura, por exemplo Jonathan Swift descreveu num dos seus poemas uma regressão infinita envolvendo pulgas. Esse poema foi rescrito pelo matemático Augustos de Morgan:

Pulgas grandes pequenas pulgas têm
Sobre as costas para as morderem
E as pulgas pequenas mais pequenas pulgas têm,
E assim ad infinitum.

E as pulgas grandes, por sua vez,
Maiores pulgas têm para morderem,
Enquanto estas as têm ainda maiores,
E essas maiores ainda, e assim sucessivamente.

Morgan, cit in Gardner, 1993, p. 23

Um paradoxo famoso relacionado com a regressão infinita é o Paradoxo de Platão e Sócrates. Eis um diálogo que o demonstra bem:

Platão: "A próxima afirmação de Sócrates será falsa."
Sócrates: "Platão disse a verdade."

Os logicistas reduziram o paradoxo de Platão e Sócrates à forma mais simples representada pelas frases:

A: A frase B é falsa.

B: A frase A é verdadeira.

Seja qual for o valor lógico que se atribua a uma das frases, será sempre contrariado pela outra.

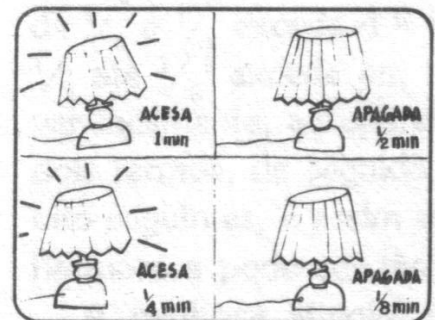
Se a frase A é verdadeira, então a B é falsa, mas se B for falsa, A também o será. Se, porém, A for falsa, B será verdadeira, enquanto, se B for verdadeira, A será também verdadeira. E eis-nos regressados ao ponto de partida, repetindo o processo ciclicamente.

Consideradas em conjunto, estas frases alteram sempre o valor lógico uma da outra, de modo que nunca poderemos afirmar que uma ou outra é verdadeira ou falsa. Estamos encurralados numa regressão infinita na qual cada frase é alternadamente verdadeira e falsa.

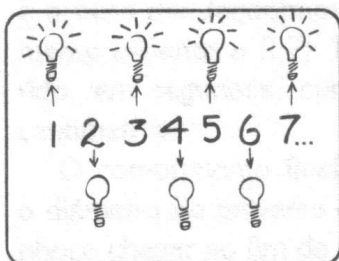
*

A lâmpada de Thomson constitui um dos mais simples paradoxos envolvendo processos infinitos num tempo finito, uma versão mais moderna dos paradoxos de Zenão.

Suponhamos que temos uma lâmpada com um interruptor que a liga e desliga. A lâmpada acende-se durante um minuto e, de seguida, apaga-se durante $\frac{1}{2}$ minuto, acende-se novamente durante $\frac{1}{4}$ minuto, e assim sucessivamente. Esta série termina decorridos exactamente dois minutos.



No final a lâmpada estará acesa ou apagada ?



Cada pressão ímpar do botão acende a lâmpada e cada pressão par apaga-a. Se no final a lâmpada estiver acesa, o último número natural será ímpar, enquanto, se estiver apagada, esse número será par.

Mas não há nenhum número natural que seja o último! Decorridos os dois minutos, a lâmpada tem de estar acesa ou apagada, mas não há maneira de decidir.

Não existem dúvidas sobre a impossibilidade de construir uma lâmpada de Thomson, mas a questão consiste em saber se a lâmpada é ou não logicamente concebível. Este paradoxo é desconcertante pelo facto de não parecer haver

razões lógicas para que a lâmpada, tal como o corredor de Zenão, não possa completar uma sequência infinita de acesa / apagada. Se o corredor consegue ultrapassar uma infinidade de pontos intermédios em dois minutos, por que não há-de o interruptor da lâmpada idealizada ser activado um número infinito de vezes de forma a terminar a sequência em exactamente dois minutos? Mas, se a lâmpada *pudesse* fazê-lo, pareceria estar demonstrada a existência de um "último" número natural, o que é absurdo.

O filósofo Max Black apresentou o mesmo paradoxo sob a forma de uma máquina do infinito que desloca um berlinde do tabuleiro *A* para o tabuleiro *B* num minuto, fazendo-o regressar de seguida a *A* em $\frac{1}{2}$ minuto, levando-o novamente para *B* em $\frac{1}{4}$ minuto, e assim sucessivamente, com tempos que formam uma progressão geométrica decrescente de metade em metade.

Esta sequência geométrica converge e termina decorridos precisamente dois minutos. Onde está o berlinde? Se estivesse em algum dos tabuleiros, concluiríamos que existiria um último número natural, ímpar ou par. Não sendo assim, parece que esta possibilidade deve ser eliminada. Mas, se o berlinde não está em nenhum tabuleiro, onde estará então?

Paradoxo de Russell

O caminho dos paradoxos é o caminho da verdade.

Oscar Wilde

O barbeiro de Sevilha barbeia todos os homens da cidade que não se barbeiam a si próprios e apenas esses. Será que o barbeiro se barbeia a si próprio? Se ele próprio se barbear, pertencerá ao grupo dos homens que se barbeiam sozinhos, mas ele afirma que nunca faz a barba a ninguém pertencente a esse conjunto. Portanto, não pode barbear-se a si próprio!

Então, se é outra pessoa que faz a barba ao barbeiro, ele pertence ao conjunto dos homens que não se barbeiam a si próprios, mas ele diz que faz a barba a todos os homens desta categoria, portanto tem de fazer a sua própria barba!



Afinal, quem faz a barba ao barbeiro?

Descoberto por Bertrand Russell em 1901, matemático e filósofo inglês Prémio Nobel de literatura em 1950, enquanto estudava os conjuntos. Abalou os fundamentos da teoria de conjuntos e veio estimular o desenvolvimento do trabalho em áreas tão diferentes como a lógica, a matemática e a filosofia nos finais do século XX. Russell começou por admitir que qualquer condição que pudesse ser enunciada definiria um conjunto cujos elementos seriam apenas as coisas que satisfizessem essa condição. Admitiu-se que a sentença esquemática

1. *Há um conjunto tal que, qualquer que seja x , x é um elemento desse conjunto se, e se somente se ... x ...*

resultaria verdadeira qualquer que fosse a maneira de preencher os espaços, indicando uma condição a que x deveria satisfazer. Se escolhermos, por exemplo, a condição "um cão ladrar para x ao meio-dia", então a sentença transforma-se em "Há um conjunto, tal que qualquer que seja x , x é um elemento desse conjunto se, e só se, um cão ladrar para x ao meio-dia". Se escolhermos a condição de se tratar de um cavalo, a sentença transforma-se em "Há um conjunto tal que, qualquer que seja x , x é um elemento desse conjunto se, e só se, x é um cavalo". Se a condição estipulada for a de não se tratar de um cavalo, então há um

conjunto a que pertencerão todos os objectos que não são cavalos e nada mais. Se a condição estipulada for tratar-se de unicórnios, haverá um conjunto tal que qualquer coisa pertencerá a esse conjunto se, e só se, essa coisa for um unicórnio (este conjunto será o conjunto vazio). Era ponto pacífico a existência de todos estes conjuntos. Ora, alguns conjuntos não são elementos de si mesmos: o conjunto de cavalos não é um cavalo, de modo que não pertence a si mesmo; o conjunto de unicórnios também não é um elemento do conjunto de unicórnios, já que não existem unicórnios. Parece, no entanto, que alguns conjuntos seriam elementos de si mesmos; o conjunto dos não-cavalos, por exemplo, parece pertencer a si mesmo, já que satisfaz a condição de não ser um cavalo. À luz do que acaba de ser exposto, considere-se a possibilidade de preencher os espaços da sentença com a condição " x é um conjunto que não é um elemento de si mesmo". Parece evidente que a sentença se torna verdade qualquer que fosse a modo de preencher os espaços, contanto que a condição tivesse sentido; poderíamos, pois, estar em condições de colocar esta última condição na sentença para obter uma segunda sentença:

2. *Há um conjunto tal que, qualquer que seja x , x é um elemento desse conjunto se, e se só se, x for um conjunto que não seja elemento de si mesmo.*

Este segundo enunciado assegura a existência de um conjunto de todos os conjuntos que não sejam elementos de si mesmos. Admitindo que a existência desse conjunto está assegurada, podemos dar-lhe um nome - digamos ϑ - e podemos propor questões a seu respeito. O conjunto ϑ é um conjunto de si mesmo? Parece evidente que estamos em condições de afirmar:

3. *Ou ϑ é um elemento de ϑ ou ϑ não é um elemento de ϑ .*

Suponhamos que ϑ é um elemento de si mesmo; nesse caso, ϑ deixaria de preencher a condição que qualquer coisa deve preencher para pertencer a ϑ e teríamos, portanto, que ϑ não pertenceria a si mesmo. Por outro lado, suponhamos que ϑ não é um elemento de si mesmo; satisfaria, então, a condição que é suficiente para torná-lo um elemento de si mesmo; seria, portanto, elemento de si mesmo. Demonstrámos, assim, que há um conjunto ϑ que é e não é, simultaneamente, elemento de si mesmo, o que é uma flagrante contradição.

O paradoxo de Russell tem grande importância por determinar uma inconsistência fundamental dentro da teoria dos conjuntos. Matemáticos da estatura de Cantor e Frege haviam dado por concluído que as sentenças 1 e 3 eram leis evidentes acerca dos conjuntos, mas o paradoxo de Russell mostra que uma atitude menos cuidadosa pode levar os matemáticos a consequências desastrosas.

A partir do momento em que nos apercebemos que usando a lógica clássica, todas frases advêm de uma contradição, avistamos a significação do paradoxo de Russell. (Por exemplo, assumindo ambos P e $\sim P$, podemos provar qualquer Q

arbitrário do seguinte modo: de P conseguimos obter $P \vee Q$ pela regra da adição, e de $P \vee Q$ e $\sim P$ obtemos Q pela regra do silogismo disjuntivo.) Aos olhos de muitos, conseqüentemente apareceu que nenhuma prova matemática poderia ser de confiança se fosse descoberto que a lógica e a teoria de conjuntos subjacente a toda a matemática fosse contraditória.

Russel assumiu uma atitude comparativa otimista em relação à importância dos paradoxos. Acreditava-se que a teoria dos conjuntos poderia voltar a ser consistente, ganhando uma forma suficientemente forte para continuar a servir os propósitos matemáticos; acreditava-se também que a maneira de devolver a consistência à teoria poderia ser perfeitamente ajustada ao senso comum. O optimismo de Russell devia-se à sua crença de que todos os paradoxos tinham como princípio o facto de violarem uma regra indiscutivelmente válida, denominada por ele "princípio do círculo vicioso". Russell enunciava o princípio na forma de um slogan: "Se, admitirmos que uma dada colecção tem um total, ela tem elementos definíveis definidos em termos apenas desse total. Então a colecção não tem um total". O raciocínio que se utiliza no paradoxo de Epiménides contradiz esta regra: ao tentar exprimir o que Epiménides disse, faz-se alusão à totalidade (ou conjunto) de todos os enunciados formulados por cretenses, totalidade a que pertenceria o próprio enunciado que se está a tentar formular. O paradoxo de Cantor desobedece àquilo que o princípio estipula: ao definir o número de números cardinais, totalidade a que esse número que se está a procurar deveria pertencer. O paradoxo de Russell não atende ao que prescreve a regra: ao definir o conjunto de todos os conjuntos que não sejam elementos de si mesmos, alude-se à totalidade de tais conjuntos, à qual pertenceria o próprio conjunto a ser definido.

Whitehead e Russell não cogitavam, está claro, na sua obra *Principia Mathematica*, apenas da eliminação desses paradoxos conhecidos. Pensavam restringir os axiomas relativos aos conjuntos de tal maneira que quaisquer paradoxos ficassem eliminados. Introduziram, com esse propósito, o que denominaram "teoria dos tipos", cujo objectivo era formular, de modo técnico e rigoroso, o "princípio do círculo vicioso". A teoria original dos tipos era bastante complexa; a ideia fundamental era de que todas as entidades definidas na teoria dos conjuntos, inclusive os próprios conjuntos, os conjuntos de conjuntos, os conjuntos de conjuntos de conjuntos, e assim por diante, estavam distribuídas por uma hierarquia de níveis, ou tipos, pertencendo cada entidade a apenas um bem determinado tipo. Ao tipo mais baixo pertenceriam os indivíduos - isto é, todas as entidades que não são conjuntos e apenas estas. Ao tipo seguinte pertenceriam os conjuntos cujos elementos seriam entidades do tipo inferior; ao terceiro tipo pertenceriam conjuntos cujos elementos seriam entidades do segundo tipo; de maneira genérica, ao tipo $n + 1$ pertenceriam conjuntos de entidades do n -ésimo tipo. Apenas as entidades que se acomodassem aos tipos dessa hierarquia poderiam ser consideradas pela teoria dos conjuntos; não se poderá permitir a presença de qualquer conjunto que tenha elementos de tipos diferentes do que o tipo imediatamente abaixo ao tipo do próprio conjunto.

A teoria dos tipos não chega, propriamente, a negar a existência de tais conjuntos; a ideia é mais radical. A teoria nega sentido às sentenças que procuram falar da pertinência de entidades a outros conjuntos que os de tipo imediatamente superior. Segundo a teoria dos tipos, as sentenças que procuram falar de tal pertinência não serão verdadeiras ou falsas, mas logicamente mal construídas: serão sentenças desprovidas de significado. Whitehead e Russell não sustentaram haver enunciados significativos que não fossem verdadeiros nem falsos; sustentaram, em vez disso, que algumas sentenças, aparentemente dotadas de significado, não passam de absurdos, não exprimindo, de modo algum, um enunciado.

A teoria dos tipos injectou na Lógica e na Filosofia a importante noção de absurdo: a noção de que mesmo sentenças que parecem dotadas de sentido podem encerrar um absurdo. Admitindo isso, a teoria dos tipos habilitou Whitehead e Russell a evitarem os paradoxos, no *Principia Mathematica*. Segundo a teoria de Whitehead e Russell, há de facto para cada condição que puder ser enunciada, um conjunto cujos elementos sejam todos os objectos que satisfaçam a condição - e apenas estes. A teoria dos tipos, contudo, impõe uma restrição no género de condição capaz de ser enunciada.

Em particular, a condição que permitiu levar à segunda sentença do paradoxo de Russell:

"Há um conjunto tal que, qualquer que seja x , x é um elemento desse conjunto se, e se só se, x for um conjunto que não seja elemento de si mesmo."

é dada como destituída de sentido, de modo que esta sentença não é falsa nem verdadeira, evitando-se, desta maneira, o aparecimento do paradoxo de Russell.

Os paradoxos de conjuntos podem então ser eliminados através do estabelecimento de uma hierarquia infinita, definindo que um conjunto não pode ser membro de si mesmo nem de qualquer conjunto de tipo inferior. Assim, o barbeiro de Russell simplesmente não existe!

A esta hierarquização, Bertrand Russell chamou originalmente Teoria dos Tipos. De uma forma simplista, pode dizer-se que a teoria de Russell ordena os conjuntos numa hierarquia de tipos de tal modo que não é permissível dizer que um conjunto é membro de si mesmo, nem que o não é, o que elimina conjuntos contraditórios. Os conjuntos potencialmente contraditórios são simplesmente riscados do sistema, pois não há qualquer modo significativo de os definir enquanto se respeitarem as regras da teoria dos tipos.

Bertrand Russell dedicou muitos anos ao estudo da Teoria dos Tipos. Na sua obra *My Philosophical Development* escreve:

Uma vez concluídos os Principia Mathematica, entreguei-me determinadamente à tarefa de tentar resolver os paradoxos. Para mim era quase um desafio pessoal e estava disposto, se preciso fosse, a dedicar o resto da minha vida a responder a esse desafio. Essa perspectiva, porém, pareceu-me profundamente desagradável,

por duas razões. Em primeiro lugar, o problema parecia-me trivial. Em segundo lugar, por mais que o tentasse, não conseguia fazer qualquer progresso. Entre 1903 e 1904 o meu trabalho foi completamente devotado a esta matéria, mas sem qualquer vestígio de sucesso.

Russell, cit in Gardner, 1993, p. 41

*

Uma das consequências desagradáveis diz respeito à infinidade dos números naturais. Os números naturais foram definidos como certos conjuntos de conjuntos. Ora, segundo a teoria dos tipos, os elementos dos conjuntos que são elementos dos números naturais devem ser, todos, entidades do mesmo tipo - presumivelmente do tipo mais baixo. Se existisse apenas um número finito de entidades desse tipo mais baixo, existiria uma grandeza máxima, finita, para o conjunto de tais entidades (um conjunto que contivesse todas as entidades teria essa grandeza máxima).

Nesse caso, porém, existiria um maior número natural (seria o conjunto de grandezas máximas, cujos elementos fossem as entidades de tipo mais baixo). Acontece, no entanto, que uma das leis da teoria dos números estabelece a inexistência de um maior número natural. Para que essa lei fosse dedutível, surgindo como teorema dos *Principia Mathematica*, Whitehead e Russell foram obrigados a introduzir o que denominaram o axioma do infinito. Trata-se de um axioma destinado a assegurar a existência de um número infinito de entidades do tipo mais baixo.

O ponto desagradável, em relação a esse axioma, é o facto de não se reunir com a Filosofia do realismo, segundo a qual a Matemática dos números exprime, simplesmente, aquilo que se pode conhecer *a priori* acerca de certas entidades abstractas. As entidades de tipo mais baixo não são presumivelmente, entidades abstractas, mas objectos físicos ou outras coisas particulares e observáveis. Segue-se que o axioma do infinito é insatisfatório.

A teoria dos tipos acarreta ainda consequências técnicas que são desagradáveis por comprometerem algumas leis da teoria dos conjuntos, o que ocorre da seguinte forma :

Na teoria dos conjuntos existe um conjunto universal, ao qual tudo pertence, um conjunto vazio ao qual nada pertence, e a cada conjunto corresponde um conjunto complementar, composto de todos os não-elementos do conjunto dado. Essas leis não podem ter vigência quando a teoria dos tipos é adoptada, já que ela permite que um conjunto possua elementos de um tipo uniforme. Resulta que existe uma série infinita de "conjuntos universais", um de cada tipo, e uma série análoga de conjuntos vazios, um de cada tipo. O complemento de um dado conjunto não pode conter os não-elementos do conjunto dado; só pode conter os não-elementos que sejam de tipo imediatamente inferior.

Ainda mais perturbador é o facto de surgir uma repetição infinita dos números naturais. Segundo a tese logicista, o número um é um conjunto de conjuntos unitários; segundo a teoria dos tipos, os conjuntos unitários devem ser todos do mesmo tipo, presumivelmente do tipo mais baixo.

Esse número um é o número que desejamos ter a fim de contar objectos do tipo mais baixo. Para contar objectos de algum tipo mais elevado, será preciso definir outro número um, distinto daquele, que deverá ser um conjunto de conjuntos unitários de tipo mais elevado. Obtemos, assim, um novo número um, correspondente a cada tipo da hierarquia dos tipos, e o mesmo acontece com os demais números naturais. Os naturais deixam, portanto, de ser únicos e uma linha de leis independentes será aplicada aos números de cada tipo.



*

Pouco antes da publicação dos *Principia Mathematica*, o matemático Zermelo propôs uma forma de evitar paradoxos que foi posteriormente elaborada por outro matemático, Fränkel.

Zermelo e Fränkel não impuseram restrições sobre as sentenças que deveriam ser consideradas como significativas, na linha de Whitehead e Russell, nem abandonaram as leis tradicionais da Lógica, na linha dos intuicionistas. Rejeitaram, em vez disso, o segundo princípio: o qual a toda a condição enunciável corresponderia um conjunto cujos elementos seriam os objectos que satisfizessem àquela condição.

A rejeição desse princípio possibilitou a Zermelo e Fränkel eliminarem o paradoxo de Russell - pois esse paradoxo não pode surgir a menos que se admita

que existe o conjunto de todos os números cardinais e que existe o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Afastando da teoria dos conjuntos esse princípio de existência irrestrita de conjuntos, evita-se o aparecimento dos paradoxos. No entanto, a teoria dos conjuntos ficaria mutilada se esse princípio fosse simplesmente abandonado sem que outro fosse colocado em seu lugar. A ideia de Zermelo era substituir o princípio por uma colecção de axiomas que assegurassem a existência de conjuntos de certos tipos bem comportados e de que não fosse possível deduzir a existência de conjuntos anómalos.

Eis alguns dos axiomas de Zermelo:

Dados dois objectos quaisquer, existe um conjunto cujos elementos são exactamente esses dois objectos e nada mais ;

Existe o conjunto de todos os elementos de elementos de um dado conjunto ;

Existe o conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto ;

Dado um conjunto qualquer, existe um conjunto formado pelos elementos do conjunto que satisfaçam a uma qualquer condição enunciável ;

Na teoria de Zermelo há apenas um conjunto vazio; não se pode demonstrar, porém, a existência de um conjunto universal. Também não se pode demonstrar a existência do complemento de qualquer conjunto (isto é, do conjunto que contenha os não-elementos do conjunto dado).

Numa teoria como a de Zermelo, a questão é introduzir axiomas suficientemente fortes para assegurar a existência dos conjuntos necessários para a dedução do maior número possível dos desejados teoremas relativos a conjuntos, restringindo, sem embargo, os axiomas a ponto de impedir o surgimento dos paradoxos.

*

Von Neumann propôs um método de organizar a teoria dos conjuntos introduzindo a ideia de que nem todas as entidades podem ser admitidas como elementos de conjuntos em vez de restringir a existência dos conjuntos como fez Zermelo.

Distribuiu as entidades em duas classes: elementos e não-elementos. Somente as entidades da primeira classe podem pertencer a conjuntos. A seguir Von Neumann arromou os axiomas que caracterizariam a condição de elemento de certas entidades bem comportadas.

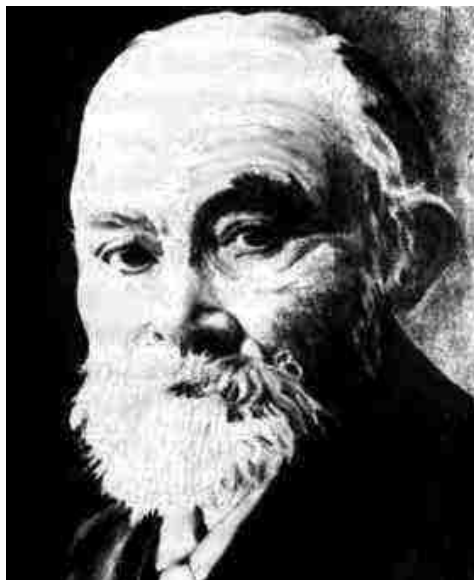
(Os axiomas de Von Neumann caracterizam como elementos aproximadamente os mesmos conjuntos bem comportados cuja existência fica assegurada pelos axiomas de Zermelo).

*

Parece que Russell descobriu o seu paradoxo em Maio de 1901 enquanto trabalhava na sua obra *Principles of Mathematics* (1903). Cesari Burali - Forti, um assistente de Giuseppe Peano havia descoberto uma antinomia semelhante em 1897 quando disse que : desde que o conjunto dos ordinais esteja bem ordenado então, também ele, deverá ter um ordinal. No entanto, estes ordinais deverão ser ambos um elemento do conjunto de todos os ordinais e ainda maiores do que todos os restantes elementos.

Russell escreveu ao matemático Gottlob Frege dando notícias sobre o seu paradoxo em 16 de Junho de 1902. O paradoxo foi de grande importância para os trabalhos de Frege sobre lógica desde logo, visto que, de facto, este mostrava que os axiomas que Frege estava a usar para formalizar a sua lógica eram inconsistentes.

Especificamente o seu *Axioma V*, o qual estabelece que dois conjuntos são iguais se e, só se as suas funções correspondentes coincidem nos valores para todos os argumentos possíveis, requer que uma expressão tal como $f(x)$ se possa considerar ao mesmo tempo como uma função do argumento f e como uma função do argumento x . No entanto, foi esta ambiguidade que permitiu a Russell a construção de ϑ (conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios) de tal modo a que ϑ fosse membro de si próprio.



A carta de Bertrand Russell chegou mesmo na altura em que o segundo volume de *Grundgesetze der Arithmetik* (importante obra de Frege sobre os fundamentos da aritmética) estava a ser impresso.

Reconhecendo imediatamente a dificuldade que o paradoxo colocava, Frege apressadamente juntou uma apêndice à sua obra de modo a poder discutir a descoberta de Russell. Nesse apêndice Frege observa que as consequências do paradoxo de Russell não são imediatamente claras. Por exemplo, " É sempre permitido falar da extensão de um conceito, a uma classe? E caso não seja, como é que nós reconhecemos os casos excepcionais? Podemos sempre inferir sobre a extensão de um conceito coincidente com esse a partir de um segundo, de que todos os objectos dentro do primeiro conceito também estarão dentro do

segundo?" Diz-se que Frege, após tomar conhecimento da carta, deixou de publicar a sua memória afirmando, contudo, que ela era boa para o cesto de papéis.

Foi por causa destes aborrecimentos, que Frege se viu eventualmente forçado a abandonar grande parte dos seus pontos de vista. O próprio Russell ficou um pouco preocupado com a sua descoberta, e tal como Frege, viu-se obrigado a compor um apêndice para rapidamente se libertar dos seus *Principles of Mathematics*. Intitulado "*Appendix B: The Doctrine of Types*", O apêndice representa a primeira tentativa de Russell para um desenvolvimento de uma teoria dos tipos «com que se possa trabalhar».

A existência do infinito

Quando discutimos uma questão transcendente, devemos ser transcendentemente claros.

Réne Descartes

Admitia-se, nos começos do século XX, que a obra de Cantor aclamara o conceito de infinito de tal modo que era legítimo tratá-lo como qualquer outro respeitável ente matemático. Porém, a controvérsia em torno da existência do infinito continuava a ocupar filósofos e matemáticos.

Mas não teria Cantor demonstrado a existência do infinito ? A resposta a esta pergunta pressupõe que saibamos o que é *demonstrar* e o que se entende por *existência* em matemática.

A palavra *demonstrar* vem do termo grego *apodeixis*, que significa *mostrar a partir de*. Demonstrar é apresentar uma prova lógica irrefutável, encadeando juízos/proposições de modo que se seja racionalmente compelido a aceitar a(s) conclusão(ões) derivada(s) da hipótese.

A *existência*, na acepção matemática, é distinta da existência no mundo físico. Desde Euclides e Aristóteles que a existência matemática é tema de reflexão. Nos tempos modernos, as diferentes escolas de filosofia matemática - logicistas, formalistas e intuicionistas - discutiram a sua essência. A escola logicista, que considera as matemáticas um ramo da lógica, e os formalistas, para quem a matemática é um mero jogo desprovido de outro sentido para além do do jogo em si, adoptaram e defenderam as teorias de Cantor. A defesa baseou-se na noção de compatibilidade evidente : existência, para os formalistas, apenas significa «livre de contradição».

Existência é uma expressão com conotações metafísicas mas, matematicamente falando, fica estabelecida por uma proposição *consistente em si mesma*. "Uma proposição que não é contraditória é um verdadeiro enunciado de existência". Nesta perspectiva, as teorias cantorianas do infinito são inexpugnáveis. O infinito conquistou, por assim dizer, um estatuto respeitável, tão real e seguro como o finito, todavia com carácter distinto.

Porém, nem tudo estava resolvido. Novos problemas e novos paradoxos ensombraram a estrutura de Cantor. Designadamente, as dificuldades de uso da palavra *todo*, já inerentes à lógica clássica, tinham de ser superadas. Afirmações como *todas as generalidades são falsas, incluindo esta*, ou o célebre paradoxo de Epiménides *todos os cretenses são mentirosos*, o qual torna mentiroso quem fala a verdade, constituem um verdadeiro problema na fundamentação da lógica. Teoricamente, o problema dos paradoxos seria resolúvel com a formalização do pensamento ou com a construção de uma linguagem totalmente bem formada. Nada disto aconteceu. As reformas da lógica clássica e as tentativas de superar os paradoxos matemáticos não foram satisfatórias, a saber : a *teoria dos tipos* de Bertrand Russell, já mencionada ; o *intuicionismo* de Brouwer, com recusa de parte da lógica clássica, do infinito actual e da aplicação indevida do terceiro excluído ; e o axiomatismo de Hilbert, concebendo a lógica como um sistema hipotético-dedutivo formal, que deriva a partir de certas proposições primitivas e das restantes proposições do sistema).



No que toca ao infinito e à teoria dos transfinitos, as reformas foram bem sucedidas. Vestígio algum de incompatibilidade ensombra "o belo edifício de Cantor". A teoria dos transfinitos pode parecer absurda a alguns, e chegou a sê-lo ao próprio autor, mas é, sem margem para dúvidas, compatível. O aforismo de Henri Poincaré ao afirmar que "a logística já não é estéril : gera contradição" foi refutado pela doutrina logicista no que toca ao infinito.

*

Descida infinita ou subida infinita

O que mais desespera, não é o impossível. Mas o possível não alcançado.

Robert Mallet

A abstracção do infinito potencial está na base do método de indução finita. Pascal apresentou no seu *Traité du triangle arithmétique* aquele que viria a ser conhecido como princípio de indução matemática. (Em França, Poincaré, em 1902, designou-o por raciocínio por recorrência.)

O princípio de indução de Pascal (já utilizado por Maurolico no seu livro de aritmética de 1557) é bem conhecido. Pode enunciar-se nos seguintes termos: suponhamos que pretendemos provar a veracidade de uma proposição $P(n)$ para todos os naturais n . Se provarmos a sua veracidade para um valor particular de n , por exemplo, para $n=1$, e de seguida provarmos que a sua validade para n implica a sua validade para $n+1$, então estabelecemos a sua validade universal.

Mas será suficiente «acreditar» na validade deste argumento?

Peano, em finais do século passado, deu-nos a resposta na sua obra *Arithmetics Principia*: estabeleceu o princípio de Pascal como um axioma.

Em vez de uma subida infinita, poderemos tentar uma descida infinita? Analisemos sumariamente o *método de descida infinita* atribuído a Fermat. Suponhamos que pretendemos provar a veracidade de uma proposição $P(n)$ para todos os naturais n . Fermat propôs a seguinte estratégia de *reductio ad absurdum*: suponhamos que existe um natural n_0 para o qual a proposição não é verdadeira e efectuemos uma descida começando por provar que existe um natural n_1 estritamente menor que n_0 para o qual $P(n_1)$ não é verdadeira. Obteremos, deste modo, uma sequência infinita de números naturais n_p para os quais $P(n_p)$ não é verdadeira, o que é contraditório!

Ou seja, Fermat identificou a propriedade fundamental do conjunto dos números naturais:

Não existe uma sequência infinita estritamente decrescente de números naturais.

O conjunto dos números naturais está bem ordenado, porque qualquer subconjunto não vazio tem um elemento menor do que todos os outros (primeiro elemento).

No *método de descida infinita*, a contradição surge da afirmação de que o conjunto E dos naturais para o qual a proposição $P(n)$ não é válida é não vazio e, assim, existe em E um inteiro n_0 menor do que todos os outros. Porém, o *método de descida infinita* permite determinar um n_1 estritamente menor do que n_0 para o qual $P(n_1)$ não é válida, o que é uma contradição.

Fermat trocou correspondência com Pascal, e tiveram controvérsias matemáticas, entre elas uma relativa à abordagem da teoria das probabilidades e do tratamento do infinito.

Entre o desafio de descida infinita e o desafio de subida infinita, qual dos dois escolher? Subir passo a passo ou descer passo a passo? Bem, depende... O certo é que os princípios de Fermat e de Pascal são logicamente equivalentes.

O fascínio dos infinitésimos

Ler bem o universo é ler bem a vida.

Victor Hugo

A teoria de Cantor sobre o infinito está na base da sua teoria dos irracionais, que pela primeira vez fundamentou logicamente os números irracionais e os relacionou com o sistema dos números racionais. Weierstrass, que foi professor de Cantor na Universidade de Berlim, trabalhou também nesta teoria, merecendo talvez mais do que Cantor os méritos da sua criação.

Ao trabalhar com o infinito, os pré-cantorianos tinham-no considerado como algo nunca alcançado, uma atitude que tinha sido em parte adquirida desde os Gregos.

Gauss marcou perfeitamente a sua posição ao afirmar :

"Eu protesto contra o uso de uma quantidade infinita como qualquer coisa completa, o que não é nunca possível em Matemática. O infinito é meramente uma maneira de falar, significando em verdade um limite do qual certas razões se aproximam indefinidamente perto."

Baseado nas ideias de Aristóteles sobre *infinito actual* e o *infinito potencial*, Cantor fez uma distinção entre estas idealizações matemáticas da seguinte forma:

"(...) a primeira sendo uma quantidade finita variável e aproximando-se à medida que se fazem aproximações, todas elas finitas, enquanto que o segundo é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas."

Esta distinção é muito importante: o infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito actual não é um processo, é ele próprio um número.

A distinção entre potencial e actual foi aplicada por Cantor aos números irracionais, e por fim, a todos os números finitos. Segundo ele, qualquer número finito pode ser visto como um processo infinito, com uma espécie de evolução, ou como uma constante fixa, que representa o processo completo. A segunda visão apresentada é a tradicional. No entanto, nenhuma das visões é nova. A primeira, mas não a segunda, é tradicionalmente utilizada quando se trabalha com o infinito; a segunda, mas não a primeira, é tradicionalmente utilizada quando se trabalha com os números racionais; e uma vaga combinação de ambas quando se trabalha com os

números irracionais. Cantor unificou as visões, mostrando que todos os números, finitos e transfinitos, podem ser vistos de ambas as formas.

As duas visões do infinito são, então as seguintes:

O infinito é um limite que nunca se atinge, de um número infinito de números. Isto é, os números 1, 2, 3, 4, 5, ... podem continuar indefinidamente, mas nunca atingirão o último, no infinito. Visto desta maneira, cada número da sequência é apenas um passo de um processo infinito. No entanto, o limite nunca atingido pode ser visto como um número em si mesmo, um número transfinito. Este número transfinito é infinitamente actualizado, é o limite para o qual se tende mas que nunca se atinge, é aquilo que Cantor considera a "quantidade, fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas."

Da mesma forma, os números irracionais podem ser vistos como o limite de uma sequência infinita de números. Uma sequência de números que tem o infinito como limite é a sequência dos inteiros, 1, 2, 3, 4, 5, ..., ou qualquer sequência gerada a partir desta, como por exemplo 1, 2, 4, 8, 16, ..., em que cada número da sequência é o dobro do antecessor. Como vimos anteriormente, todas estas sequências têm o mesmo "tamanho", \aleph_0 , o primeiro número da sequência dos números transfinitos. O problema agora é como representar as sequências infinitas que têm números irracionais como limite. Também aqui, Cantor resolveu o problema de uma forma tão simples que a maior parte das pessoas nem se lembraria de tentar. Por exemplo, o número irracional $\sqrt{2}$ pode escrever-se na forma de dízima infinita não periódica, 1,414214... Como é que esta dízima pode ser representada por uma sequência infinita de números racionais que se aproximem crescentemente de $\sqrt{2}$ mas que nunca ultrapassem o seu valor?

Isso pode ser feito de forma muito simples:

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, ... Cada número desta sequência é apenas um passo do processo infinito de geração do número irracional $\sqrt{2}$. Assim, $\sqrt{2}$ é o limite de um processo infinito e, tal como o limite da sucessão dos inteiros pode ser visto como um número, o número transfinito \aleph_0 , também o limite da sequência racional 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, ... pode ser visto como um número, o número irracional $\sqrt{2}$. Este número irracional fica assim definido, pela primeira vez na história, apenas em termos de números racionais.

Nenhum destes dois pontos de vista se aplicam apenas aos números irracionais ou transfinitos. Eles aplicam-se também aos números racionais. Como a visão de um número racional como uma quantidade fixa é suficientemente bem conhecida, será omitida; um número racional visto como limite de um processo infinito é que é menos conhecido e merece ser considerado.

Todos os números racionais podem ser escritos na forma de dízima infinita. Por exemplo, 4 pode ser escrito como 4.0000..., com os zeros a continuar indefinidamente; a fracção $1/3$ é 0.3333..., e $1/7$ é 0.1428571428571... Qualquer dízima infinita pode, naturalmente, ser reescrita como uma sequência infinita; e uma sequência infinita deste tipo chegará, depois de um número infinito de passos, ao seu limite. Assim, os números racionais podem também ser vistos como o limite de um processo infinito. Vistos desta perspectiva, eles parecem não diferir dos irracionais - no entanto a diferença existe. Sempre que um número racional é escrito sob a forma de dízima a sua sequência de dígitos repete-se, sendo por esse motivo designados por dízimas infinitas periódicas. No primeiro exemplo que se viu, 0 repetia-se infinitamente, no segundo era 3, e no terceiro era a sequência 142857. As dízimas periódicas são características de todos os racionais e nunca ocorrem nos irracionais. Isto pode ver-se facilmente tomando a dízima 0.142857142857... e pondo $x = 0.142857...$ (Note-se que qualquer operação efectuada em ambos os membros da equação, não afectará o valor de x). Multiplicando ambos os membros da equação por um milhão: $1000000x=142857.142857...$ Agora subtraindo a primeira equação da segunda esta equação pode agora ser escrita sob a forma de fracção:

$$x = 142857/999999$$

Simplificando a equação vamos obter $1/7$. Assim, $1/7$ é o equivalente, em termos fraccionários, à dízima infinita periódica 0,142857142857...

Um número irracional nunca pode ser escrito sob a forma de uma fracção racional e portanto (como podemos concluir invertendo o processo anterior) nunca pode ter uma dízima periódica.

Estas duas formas de olhar para os números resolveram muitos dos antigos problemas da Matemática, incluindo os dos infinitésimos.

*

Infinitésimos são sucessões que normalmente têm o zero como limite (ao invés de infinito), sendo que a sucessão decresce por quantidades cada vez menores, em vez de crescer. Em ambos os casos, no entanto, as sequências convergem dentro de limites.

Parece existir qualquer coisa fantasticamente atraente no infinito, nos processos infinitos e nos infinitésimos que leva a discussões apaixonadas e apaixonantes, que nunca se esgotam.

Podemos encontrar "vestígios" de infinitos e infinitésimos por toda a parte, tanto na nossa maneira de falar como de pensar: instantes ou momentos de tempo, demorar uma eternidade, velocidades instantâneas, a ideia de uma curva como uma série de segmentos de recta infinitamente pequenos, velocidades infinitas...

O tema do infinitamente grande foi já amplamente tratado, defendido e contestado. Vejamos agora a forma apaixonada como Georges Reeb fala da questão do infinitamente pequeno, ou infinitesimal:

« O sonho de um cálculo infinitesimal merecedor desse nome, isto é, no qual dx e dy sejam números infinitesimais, $\int_a^b f(x)dx$ seja uma soma genuína de tais números e os limites sejam atingidos, tem sempre sido sonhado pelos matemáticos; e um tal sonho merece talvez um inquérito epistemológico.

Outros sonhos, talvez menores, quando comparados com as conquistas do cálculo, têm assombrado o mundo dos matemáticos e dos seus desejos: é a ideia de um mundo onde os inteiros possam ser classificados como "grandes", "pequenos" ou até "indeterminados" sem perda de um raciocínio consistente, satisfaçam o princípio de indução e os sucessores de inteiros pequenos permaneçam pequenos; um mundo onde conjuntos concretos, talvez difusos, mas, de qualquer modo, não finitos, pudessem ser agrupados num só conjunto finito; um mundo onde fracções contínuas seriam aproximadas quase perfeitamente por polinómios de grau fixo.

Num mundo como este, o domínio do finito poderia ser explorado, quer através do telescópio, quer através da lupa, de maneira a obterem-se imagens completamente novas. Dentro de um tal mundo, o critério de rigor estabelecido por Weierstrass, interpretado de duas maneiras, poderia dar origem à fantasia e à metáfora.

(...) Deveria haver uma cadeia infinita unindo um qualquer macaco a Darwin, respeitando as regras: o filho de um macaco é um macaco, o pai de um homem é um homem. »

Reeb, cit in Stewart, 1996, p. 85

Terá Cantor podido antever parte deste mundo maravilhoso?... Talvez sim, talvez não, mas colocou-nos a todos muito mais próximos de tal paraíso, tal como Hilbert defendeu.

*

Os fantasmas desaparecidos

Nunca se vai tão longe como quando se sabe para onde se vai.

Oliver Cromwell

Após a descoberta do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz no século XVIII, a problemática do infinito conheceu um novo impulso. Leibniz tentou explicar a Sofia Carlota da Prússia o cálculo infinitesimal, matéria pela qual esta manifestou total desinteresse, invocando que a conduta dos seus cortesãos já a familiarizara demais com o infinitamente pequeno.

O infinitésimo tinha propriedades assombrosas. Não era zero, era menor do que qualquer quantidade e não lhe era atribuída qualquer tamanho ou natureza. Todavia, grandes quantidades destes infinitésimos originavam grandezas definidas. Newton interessou-se pela questão e recorreu a argumentos teológicos para argumentar as suas opiniões na matéria.

As relações muito estreitas que existem entre o zero e o infinito tornam-se intuitivas pelas duas particularizações da equação

$$x + y = x$$

1º quando x é uma constante, y é nulo

2º quando y é uma constante, x é infinito

*

No século XIX, Weierstrass, incapaz de desvendar a essência dos infinitésimos, enterrou-os com o flogisto e outros enigmas insolúveis. Weierstrass, tal como Cauchy, considerava que o infinitamente grande ou o infinitamente pequeno eram apenas potencialidade, tal como Aristóteles ideara. A definição de limite de Weierstrass (a definição usual $\varepsilon - \delta$: o limite de uma função $f(x)$ definida numa

vizinhança de a quando x tende para a é igual a A finito se para qualquer número $\varepsilon > 0$ for possível encontrar um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que x satisfaça a condição $|x - a| < \delta$) veio libertar o cálculo de especulações metafísicas, assim nascendo a moderna análise.

*

Em análise matemática, o infinito abarca um duplo aspecto: o infinitamente grande e o infinitamente pequeno. Apesar de o método dos «infinitamente pequenos» ter sido utilizado com sucesso pelos sábios da Grécia antiga e da Europa medieval (no cálculo de áreas, volumes, em problemas de geometria e de filosofia natural), as definições exactas dos conceitos fundamentais da teoria das funções infinitamente pequenas só vieram a ser alcançadas no século XIX.

Durante muito tempo considerou-se que as grandezas finitas eram compostas por «um número infinitamente grande» de «infinitamente pequenos» (indivisíveis), que não eram encarados como variáveis, antes como constantes menores do que qualquer grandeza conhecida. Esta concepção é um exemplo da separação ilegítima entre infinito e finito. O que tem sentido é a subdivisão de grandezas finitas num número indefinidamente crescente de componentes indefinidamente decrescentes.

Os infinitésimos atormentaram os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, não impedindo, porém, o cálculo de se desenvolver. Newton e Leibniz foram os grandes criadores do cálculo infinitesimal em finais de 600. Em 1734, o bispo George Berkeley, crítico da jovem análise moderna, publicou a obra *O Analista, ou Um Discurso Destinado a Um Matemático Infiel. Onde Se Examina Se o Objecto, Princípios e Implicações da Análise Moderna São mais Distintamente Concebidos, ou Claramente Deduzidos, do Que os Mistérios Religiosos e os Pontos da Fé. «Primeiro Tira a Trave do Teu Próprio Olho; depois Verás claramente para Tirar o Arqueiro do Olho do Teu Irmão»*. O matemático infiel era, crê-se, Edmund Halley, que deu nome ao cometa. Halley financiou e incentivou a publicação dos *Principia* de Newton (1687) (Newton publicava com extrema reserva) e diz-se que convenceu um amigo de Berkeley das «impossibilidades da doutrina cristã».

No século XVII «o problema das tangentes» - isto é, a determinação do coeficiente angular da tangente á curva $y = f(x)$ - era um problema candente. Também o desenvolvimento da mecânica requeria o cálculo da razão instantânea do movimento arbitrário de um ponto, como no caso precedente uma derivada. Apolónio de Perga, no século III a.C., resolvera o problema das tangentes para as secções cónicas recorrendo a argumentos geométricos. Newton e Leibniz atacaram

a questão usando a geometria analítica, recém criada por Descartes. Como não existisse então uma *teoria dos limites*, tentaram calcular a derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

com a razão dos infinitésimos

$$f'(x) = \frac{dx}{dy}$$

Mas o que é um infinitésimo?

A propósito da parábola $y = x^2$, o argumento de Newton consistia em aumentar x ligeiramente para $x + o$, sendo a taxa média de variação

$$\frac{(x + o)^2 - x^2}{(x + o) - x}$$

ou simplificando

$$\frac{2ox + o^2}{o} = 2x + o$$

Quando o tende para zero, o declive $2x + o$ é $2x$ (tende para $2x$). É este o valor da fluxão - como Newton dizia - do fluente x^2 . A argumentação de Leibniz era semelhante, mas, em vez de o , usava o símbolo dx , «um pedaço de x ».

Newton definiu fluxão (derivada) como «a razão última de incrementos evanescentes». Ao que Berkeley pergunta: «E o que são estas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes? Não são quantidades finitas nem quantidades infinitamente pequenas, nada. Não poderemos chamar-lhe fantasmas de quantidades desaparecidas?» Berkeley argumentava que ou o é zero, e os cálculos não fazem sentido porque não tem sentido dividir por zero, ou o não é exactamente zero e, neste caso, os cálculos estão errados, ainda que por pouco. Berkeley via o como uma constante bem definida, que ao mesmo tempo devia ser zero e diferente de zero, um absurdo. Newton via o como uma variável tão próxima de zero quanto se quisesse.

O conceito de infinitésimo como grandeza variável que tende para zero e o de derivada como limite da razão de incrementos infinitamente pequenos foram propostos por Newton (1642 - 1727), embora de forma não totalmente rigorosa. A forma rigorosa é creditada por Cauchy (1789 - 1857) e o moderno conceito de

diferencial como parte principal do incremento é-lhe igualmente atribuído, sem prestar o devido tributo ao papel pioneiro de Anastácio da Cunha. Cauchy deu também a definição rigorosa de integral como um limite de somas.

Cauchy no seu famoso livro *Cours d'analyse* de 1821 definiu assim *limite* :

Quando os sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo acabando por diferir dele uma quantidade tão pequena quanto queiramos este último é chamado o limite de todos os outros.

Quanto ao *infinitésimo* explicou-o da seguinte forma :

Dizemos que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando o seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero.

E *variável*, já fora antes definida ?

Nos espaço das funções reais de variável real, o sistema de números reais é computado com dois elementos $-\infty$ e $+\infty$. Pudemos supor que para todo o a finito $-\infty < a < +\infty$ e que são preservadas as propriedades fundamentais das desigualdades neste campo alargado. Valem para $-\infty$ e $+\infty$ as seguintes regras das operações aritméticas :

$-\infty + a = -\infty$	se $a \neq +\infty$
$+\infty + a = +\infty$	se $a \neq -\infty$
$(+\infty) \cdot a = +\infty$	se $a > 0$
$(+\infty) \cdot a = -\infty$	se $a < 0$
$(-\infty) \cdot a = -\infty$	se $a > 0$
$(-\infty) \cdot a = +\infty$	se $a < 0$
$(+\infty) + (-\infty)$	sem sentido
$(+\infty) \cdot 0$ e $(-\infty) \cdot 0$	sem sentido

Na teoria das funções de variável complexa é necessário adicionar ao sistema dos números um infinito sem sinal, ∞ , ao qual chamamos o *ponto no infinito*. Não são consideradas desigualdades que envolvam ∞ e a questão de saber se ∞ é maior ou menor do que o número finito não tem sentido.

Somas Paradoxais

É necessário ter o caos cá dentro para gerar uma estrela.

Friedrich Nietzsche

Concluimos a análise do infinito com algumas reflexões sobre a incidência deste conceito (e do infinitésimo seu parente) na análise. Ao longo da história, o infinito surgiu com insistência a propósito de somas infinitas. Quanto vale, por exemplo, a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots ?$$

À medida que o número de parcelas aumenta a soma aproxima-se cada vez mais de 2. Quando aquele número de parcelas tende para o infinito, a soma é 2. Existe uma espécie de tensão entre o primeiro membro (infinito) e o segundo (finito)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Atentemos no seguinte caso paradoxal : qual é a soma da série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ?$$

Escrita a série na forma

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

a soma é, obviamente, zero. Por outro lado, escrita na forma

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

é claramente 1. Logo $0 = 1!$.

Havia que dar sentido a problemas como este ! Que solução encontraram os matemáticos para a *crise das somas* ? Nada mais do que reduzir o problema de somas infinitas $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ a um problema de somas finitas $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Se existir um a tal que a soma finita *difira* de a , em

módulo uma quantidade menor do que qualquer ε pré- estabelecido, desde que se tome n suficientemente grande (n maior do que um certo N que só depende de ε), então diz-se que a soma faz sentido e vale a . Ou seja, a soma da série terá sentido se o limite de S_n quando n tender para o infinito, for a , que é também o valor da soma procurada.

Bibliografia



Livros

- Boll, M. (1979). *As Etapas da Matemática*. Lisboa: Publicações Europa - América.
- Bouvier, A. (1976). *A Teoria dos Conjuntos*. Lisboa: Publicações Europa - América.
- Caraça, B. (2000). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Gradiva, Lisboa, 3ª ed.
- Cruz, A. (1987). *Matemática 9ºano*. Porto: Porto Editora.
- Dantzig, T. *Número, A Linguagem da Ciência*. Lisboa: Editorial Aster.
- Diciopédia 2002* (2001). Porto: Porto Editora.
- Dyson, F. (s.d.). *Infinito em Todas as Direcções*, Lisboa: Gradiva.
- Gardner, M. (1994). *Festival Mágico da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Gardner, M. (1993). *Ah, Apanhei-te!*, Gradiva, Lisboa, 1ª ed.
- Guillen, M. (1987). *Pontes para o Infinito*. Lisboa: Gradiva.
- Hughes, P. (1993). *Círculos Viciosos e Infinito*. Lisboa: Gradiva
- Kirk, G. e Raven, J. (1979). *Os Filósofos Pré-Socráticos*, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Providência, N. (2000). *Matemática ou Mesas, Cadeiras e Canecas de Cerveja*. Lisboa: Gradiva.
- Romano, R. (dir.). (1997) *Infinito, Enciclopédia Einaudi* (vol 18), Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Struik, D. (1992). *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, 2ª ed.
- Verbo Enciclopédia Luso - Brasileira de Cultura* (volumes II, X, XV, XVIII) (1976). Lisboa: Editorial Verbo.



Internet

<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/histinfinito.htm>

<http://www.cfh.ufsc.br/~simposio/megahist-filos/prim-fil/0335y222.htm>

<http://br.geocities.com/ivolandia/teoria11.htm>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>

<http://www.accio.com.br/Nazare/1946/m-fisica.htm>

<http://www.mundodosfilosofos.com.br/zenao.htm>

<http://planeta.clix.pt/fredericoanacletoarroja/>

<http://mathforum.org/isaac/mathhist.html>

<http://www.led.ufba.br/algebra1a/trab4/>

<http://www.mcmaster.ca/russdocs/russell.htm>

ANEXOS